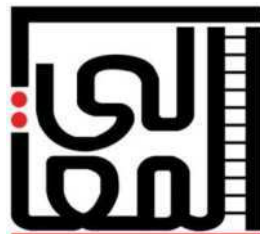


أولاً : الجبر

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} \textcolor{green}{2} \\ \downarrow \\ \textcolor{green}{3} \end{array} x^{\begin{array}{c} \textcolor{blue}{1} \\ \downarrow \\ \textcolor{blue}{2} \end{array}} & - & \begin{array}{c} \textcolor{green}{2} \\ \downarrow \\ \textcolor{green}{2} \end{array} xy & + & c \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\textcolor{red}{3}} & \uparrow \textcolor{purple}{4} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\textcolor{red}{3}} & \uparrow \textcolor{purple}{4} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\textcolor{orange}{5}} \end{array}$$



دائماً في العلى

٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧

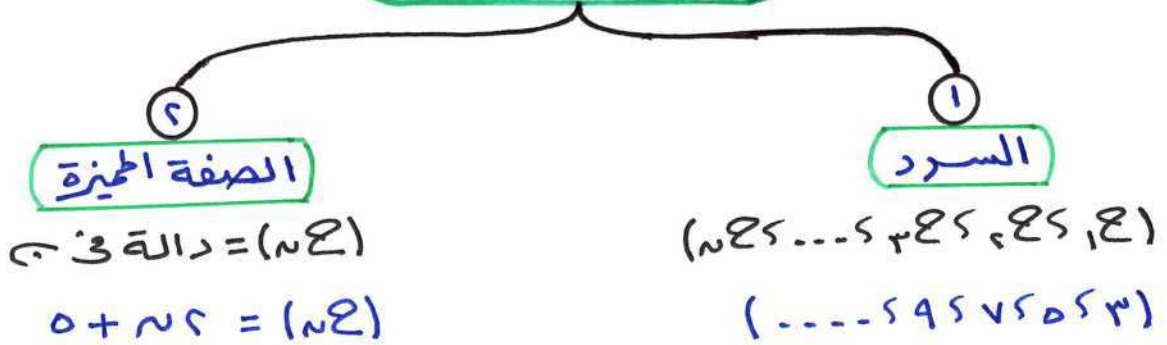
٠١١١١٩٥٤٨٠٠

المتتابعات

المتتابعة الحقيقية هي دالة مجالها $\mathbb{N}^+$ أو مجموعة جزئية منها ومجالها المقابل $\mathbb{R}$

$$\therefore d : \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$$

طريقة كتابة المتتابعة



المتتابعة تلتون



① المتتابعة هي دالة مجالها

$$p \quad +n \quad n \quad ص \quad +ص \quad ع \quad ع$$

② اذكر الرابع في المتتابعة (n^2) حيث $n^2 = \frac{n^2}{1+n}$ هو

$$p \quad 2 \quad n \quad 5 \quad م \quad \frac{5}{2} \quad ع \quad \frac{5}{2}$$

③ في المتتابعة (n^2) $1 - n^3 = n^2$ إذا كان $n^2 = 74$ فإن $n =$

$$p \quad 5 \quad n \quad 6 \quad م \quad 3 \quad ع \quad 2$$

٤ في المتتابعة (nE) حيث $nE = 1 + nE$ إذا كان $nE = 1$ فإن $nE = 1$

١ ٢ ٣ ٤

٥ في المتتابعة (nE) حيث $nE = 1 + nE$ إذا كان $nE = 1$ فإن $nE = 1$

١ ٢ ٣ ٤

أذكر الـ ١٠ للمتتابعة
التي تسمى بالمتتابعة nE حيث $nE = 1 + nE$ إذا كان $nE = 1$ فإن $nE = 1$

تدريب أكتب الـ ١٠ للمتتابعات الآتية :-

١ $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots)$ $nE = 1$

٢ $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \dots)$ $nE = 2$

٣ $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots)$ $nE = \frac{1}{n}$

٤ $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots)$ $nE = \frac{1}{n}$

ملاحظات

١ إذا اختلفت إشارة كل حد عن إشارة الحد التالي له فبأنه المتتابعة تتكون
متتابعة تذبذبية

٢ متتابعة فيبوناتشي هي $(nE) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots)$

قاعدتها هي $nE + nE = nE + 1$ لكن $nE \neq 1$ $nE = 1$ $nE = 1$

٣ بعض المتتابعات ليس لها قاعدة معروفة وبالتالي ليس لها حد عام

٤ سوف يتم شرح أنواع المتتابعات بعد ذلك ويتم إيجاز الـ ١٠ للمتتابعات

المتسلسلات

المتسلسلة $\sum_{i=1}^n x_i$

جمع حدود المتقابلة الخاصة بها

$$\sum_{i=1}^n (x_i) = x_1 + \dots + x_n$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i) = \dots + x_n + x_{n+1}$$

المتقابلة (x_n)

قائمة مرتبة من الحدود

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ منتهية

$(x_1, x_2, x_3, \dots)$ غير منتهية

تمرين 1

$$30 = \sum_{i=1}^4 (11 + (i-1) \times 5) = 11 + 16 + 21 + 26$$

$$29 = \sum_{i=1}^4 (1 - (i-1) \times 5) = 1 + (-4) + (-9) + (-14)$$

ملاحظة: يمكن استخدام الآلة الحاسبة لاجار الحائل السابقة

خواص عملية التجميع 3

$$\sum_{i=1}^n (c \times x_i) = c \times \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^n x_i \pm \sum_{i=1}^n y_i$$

تدريب
٢

١ اكر الرابع في المتتابعة (n^2) هو $2 + n$ هو

٤ (P) ٦ (U) ١٦ (M) ١٨ (S)

٢ اكر الخامس في متتابعة الأعداد الطبيعية التي تقبل القيمة على ٥ هو

٥ (P) ٢٥ (U) ٢٠ (M) ١٠ (S)

٣ اكر النوني لمتتابعة $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ هو

٢٢ (P) ٢٤ (U) ٢ (M) ٢٧ (S)

٤ مجموع المتسلسلة $\sum_{i=1}^5 n^2 =$

١ (P) ٢ (U) ٦ (M) ١٨ (S)

٥ المتسلسلة: $1 \times 5 + 2 \times 5 + \dots + 10 \times 5$ تكتب باستعمال رمز التجميع --

٢ (P) $\sum_{i=1}^5 n$ (U) $\sum_{i=1}^5 n^2$ (M) $\sum_{i=1}^5 n^5$ (S)

٦ قيمة المتسلسلة $\sum_{i=1}^3 (1 - n^3)$ تساوي

٦٢ (P) ٧٠ (U) ٧٥ (M) ٧٧ (S)

٦ قيمة المتسلسلة $\sum_{i=1}^5 (n^2 - ٩)$ =

٢٦ (P) ٢٧ (U) ١٢٦ (M) ١١٢ (S)

٧ قيمة المتسلسلة $\sum_{i=1}^3 n^3$ تساوي

١٥ (P) ٤٥ (U) ٢٠ (M) ٢٠ (S)

المتابعة الحسابية

* نسمى المتتابعة (u_n) حسابية إذا كان: $u_{n+1} - u_n = \text{مقدار ثابت}$

لكن $n \in \mathbb{N}$. يسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة الحسابية S .

ملحوظة: المتتابعة (u_n) تكون حسابية إذا وفقط إذا كان صدها إعطاء u_n دالة من الدرجة الأولى في n . ويكون أساسها $S = \text{معامل } n$.

تدريباً أى المتتابعات التالية حسابية ...

- 1) $(u_n) = n^2 - n + 1$ ← ليست متتابعة حسابية دالة من الدرجة الثانية
- 2) $(u_n) = \frac{1}{n+2}$ ← ليست متتابعة حسابية دالة كسرية
- 3) $(u_n) = 3 \times n^2 + 1$ ← ليست متتابعة حسابية دالة أسية
- 4) $(u_n) = \frac{1}{n} - 5$ ← متتابعة حسابية دالة كثيرة حدود درجة أولى

الحال العام (النموذج) للمتتابعة الحسابية

$$u_n = S(n-1) + P$$

↓
↓
↓
↓

أساس المتتابعة
رتبة الحد
الحد الأول
قيمة الحد

* الصورة العامة للمتتابعة الحسابية :

$$(P < P + S < P + 2S < P + 3S < \dots < P + (n-1)S)$$

حيث l الحد الأخير

ترتيب ٢ في المتقاربة الحسابية (١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠) أو جد :-

١ قيمة الحد العاشر ٢ رتبة الحد الذي قيمته تساوي ١٢١

٣ رتبة أول حد قيمته أكبر من ٣٠٠

الحل

الشرح الحد الأول $a = 1$

أساس متقاربة $s = 4$ $u = 1$ $v = 3$ $u - v = 1$ $v - u = 3$ $u = 1$ $v = 3$

$$\begin{aligned} 300 &< n \cdot 4 \quad (3) \\ 300 &< 4(1-n) + 1 \\ 300 &< 4 - 4n + 1 \\ 300 &< 5 - 4n \\ 295 &< -4n \\ 73.75 &< -n \\ 73.75 &< n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 121 &= n \cdot 4 \quad (2) \\ 121 &= 4(1-n) + 1 \\ 121 &= 4 - 4n + 1 \\ 121 &= 5 - 4n \\ 116 &= -4n \\ 29 &= -n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \quad 5 + 4 &= 1 \cdot 4 \\ 9 + 1 &= \\ 37 &= 1 \cdot 4 \end{aligned}$$

- ملاحظات ١ لاجبار رتبة الحد الذي قيمته k $\Rightarrow k = n \cdot 4$
- ٢ لاجبار رتبة أول حد موجب $\Rightarrow 0 < n \cdot 4$
- ٣ لاجبار رتبة أول حد سالب $\Rightarrow 0 > n \cdot 4$
- ٤ لاجبار رتبة أول حد قيمته $< k$ $\Rightarrow k < n \cdot 4$
- ٥ لاجبار رتبة أول حد قيمته $> k$ $\Rightarrow k > n \cdot 4$
- ٦ لاجبار عدد حدود المتقاربة $\Rightarrow k = n \cdot 4$

ترتيب ٣ في المتقاربة الحسابية (١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠) أو جد رتبة أول حد سالب

$$\begin{aligned} 40 &= p \\ 4 &= s \end{aligned}$$

$$0 > 4(1-n) + 4 \Rightarrow 0 > 4 - 4n + 4 \Rightarrow 0 > 8 - 4n \Rightarrow 4n > 8 \Rightarrow n > 2$$

تدريب ٤ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية (٩٥٥ ١٥٦ ١٠٥) (٩٥٥)

الحل

$$\begin{array}{l} 5 = p \\ 5 = s \\ 95 = d \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 = n \\ \therefore l = s(1-n) + p \\ \therefore \end{array}$$

تدريب ٥ إثبت أنه لا يوجد حد قيمته ١٠٠ في المتتابعة الحسابية (..... ١٣ ١٧ ٢١ ٢٥)

الحل

$$\begin{array}{l} 13 = p \\ 2 = s \\ 100 = n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{نحرض } 100 = n \\ \therefore 100 = s(1-n) + p \\ \therefore \end{array}$$

تدريب للحلقة

١ عدد حدود المتتابعة الحسابية (١٧١٢ ١٥٦ ١١٢ ٧) هو

٣٢ (ب) ٦٧ (ج) ١٦٩ (د) ٩٢١٢ (هـ)

٢ في المتتابعة الحسابية (١٢١ ١٤٦ ١٦٦) رتبة الحد الذي قيمته ١٠٤ ياوى

٤٦ (ب) ٥١ (ج) ٩٤ (د) ٤٥ (هـ)

٣ المتتابعة الحسابية (٣ ٥٢ ٧٥) حدها الكونى ياوى

٢٣ (ب) ١+٢٢ (ج) ٢-٢٥ (د) ٢٢ (هـ)

٤ إذا كانت (٩٢ ٢٤ ٣٢ ٩٥) متتابعة حسابية فإنه لـ =

٢١ (ب) ٣١ (ج) ٩٥ (د) ١٤٤ (هـ)

تعيين المتقايسة الحسابية

ترتيب ١ أوجد المتقايسة الحسابية التي صدها الثالث = ٨ و صدها السادس = ١٧

الحل

الشرح

$$17 = 6a$$

$$8 = 3a$$

$$\text{II} \leftarrow 17 = 5a + p$$

$$\text{I} \leftarrow 8 = 3a + p$$

بحل المطارعتين I و II $\Rightarrow 9 = p$ $3 = 5$ 2

$\therefore$ المتقايسة هي (٢ ٨ ٥ ٢ ٢ ----) #

ترتيب ٢ (٢٤) متقايسة حسابية فيها ١٤ = ٢٤ + ٩ = ٥٤ = ٢٤ أوجد المتقايسة

الحل

ترتيب ٣ متقايسة حسابية صدها الرابع = ١١ ومجموع صدها الخامس والسادس = ٤٠ أوجد المتقايسة ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته ١٥٢ في المتقايسة .

الحل

الشرح

$$11 = 4a$$

$$40 = 9a + 5a$$

$$40 = 5a + p + 5a + p$$

$$\text{II} \leftarrow 40 = 51a + p$$

$$\text{I} \leftarrow 11 = 3a + p$$

بحل المطارعتين I و II $\Rightarrow 3 = 5$ 2 $\therefore$ المتقايسة (٢ ٨ ٥ ٢ ٢ ----)

$$152 = na$$

$$51 = n \therefore 152 = 3 \times (1 - n) + 2$$

تدريب ٤ أوجد المتقايفة الحسابية التي حدها الخامس = ٢١ ، حدها العاشر يساوي ثلاثة أمثاله حدها الثالث .

الحل

$$\begin{aligned} 2^3 &= 10 \\ (s+p)^2 &= 59+p \\ \text{II} \quad \text{---} \quad 0 &= 56-p^2 \end{aligned}$$

الشرح

$$\begin{aligned} 2^3 &= 10 \\ \text{I} \quad \text{---} \quad 21 &= 56+p \end{aligned}$$

حل المعادلتين I و II $\Rightarrow p = 9$ $s = 5$
 $\therefore$ المتقايفة هي (٩ ١٤ ١٩ ٢٤ ٢٩ ٣٤)

تدريب ٥ أوجد المتقايفة الحسابية التي حدها السادس = ٢٠ ، الحنبة بين حديها الرابع والعاشر تساوي ٦ : ٧

الحل

تدريب ٦ متقايفة حسابية حدها الاول = ٣ ، حدها ٣٩ = ٢٤ ، حدها ٧٩ = ٢٠
 فما قيمة n ؟ ثم أوجد المتقايفة .

الحل

الوسط الحسابي

* إذا كان $a < b$ ثم شرته حدود في تتابع حسابي فإنه يسمى وسط حسابي بين a و b ويكون: $b = \frac{a+b}{2}$ أي $a+b = 2b$

ترتيب ١ إذا كانت (a, b, c) متتابعة حسابية أو مجرد قيمة a

الحل

الشرح $\therefore$ وسط حسابي بين a, b

$$\therefore a + b = 2c$$

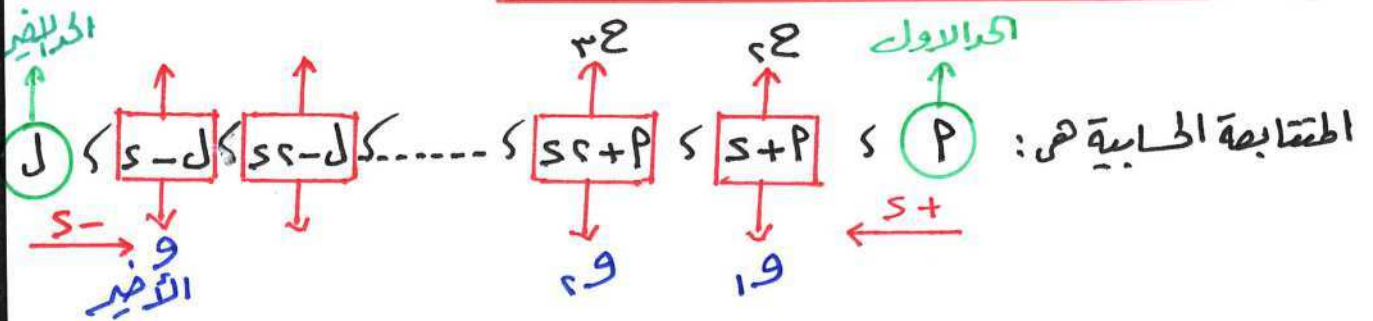
$$\therefore (a+b) = 2c \Rightarrow a+b = 2c$$

$$\therefore a+b = 2c \Rightarrow a+b = 2c$$

ترتيب ٢ إذا كان الوسط الحسابي بين a, b هو c ، الوسط الحسابي بين b, c هو d ، فأوجد قيمة a, b, c

الحل

* إدخال عدة أوساط حسابية بين a, b



الفرق ما بين اكد والوسط في المقتابلة الحسابية

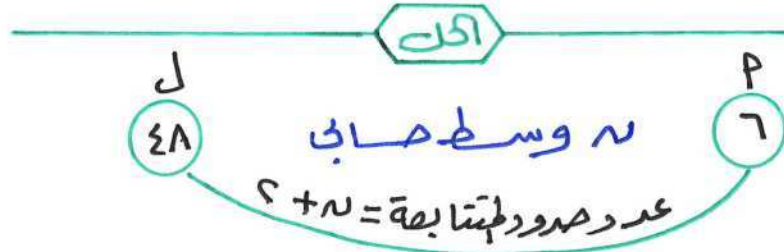
لاحظ

$$s(4) + p = 49$$

$$s(3) + p = 42$$

ترتيب 3 اذخله اوساط صابية بين 4 8 5 6

الشرح



∴ الأوساط هي

(4 1 5 3 4 5 6 7 8 9 10 13)

$$\begin{aligned} L &= N \\ L &= s(1-N) + P \\ 48 &= s(1-5) + 6 \\ \boxed{N=5} \end{aligned}$$

ترتيب 4 إذا أدخلنا عدة اوساط صابية بين 3 6 5 6 وكانت النتيجة بين

مجموع اوساطين الاولين الى مجموع اوساطين الاخيرين نتيجة 3:1 فمعددا لوساط

مجموع اوساطين الاولين الى مجموع اوساطين الاخيرين نتيجة 3:1 فمعددا لوساط



$$\begin{aligned} L &= 36 \\ P &= 6 \\ \text{الوساطين الاولين} &= 36, 32, 28, \dots, 12, 8, 4 \\ \text{الوساطين الاخيرين} &= 36, 32, 28, \dots, 12, 8, 4 \end{aligned}$$

نفرض عدد اوساط = N
عدد اكد = 9 + N

$$\begin{aligned} L &= 9 + N \\ 36 &= 3 \times (1 + N) + 6 \\ 9 &= N \\ \therefore \text{عدد الاوساط} &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{s(1+6) + s(1+6)}{s(1+36) + s(1-36)} \\ \frac{1}{3} &= \frac{s(7) + s(7)}{s(37) + s(-35)} \\ \frac{1}{3} &= \frac{2s(7)}{s(2)} \\ \frac{1}{3} &= \frac{(s+1)3}{(s-35)3} \\ \boxed{3} &= s \end{aligned}$$

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

مجموع المتقابلة الحادية

$$[L + P] \frac{N}{C} = H \quad \text{حيث } L = 1, P = 1, N = 1, C = 1, H = 1$$

$$[S(1-N) + P] \frac{N}{C} = H \quad \text{حيث } S = 1, P = 1, N = 1, C = 1, H = 1$$

ملاحظات

1. لايجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع موجباً $\leftarrow H > 0$
2. لايجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع سالباً $\leftarrow H < 0$
3. لايجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع أكبر ما يمكن $\leftarrow$ عدد الحدود الموجبة
4. لايجاد عدد الحدود التي تجعل المجموع أصغر ما يمكن $\leftarrow$ عدد الحدود السالبة

ترتيب 1

أوجد مجموع الصيغة صرود الأولى من المتقابلة الحادية (5 8 11 14 ...)

الحل

$$\begin{aligned} 5 &= P \\ 3 &= S \\ 10 &= N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore H &= [S(1-N) + P] \frac{N}{C} \\ 10 &= [3 \times 9 + 5 \times 2] \frac{1}{1} \end{aligned}$$

ترتيب 2

أوجد مجموع المتقابلة الحادية (4 9 14 19 24 ...)

الحل

- الشرح
- يجب معرفة عدد حدود المتقابلة
 - نوجد بعد ذلك المجموع من بيانات الحالة

$$[L + P] \frac{N}{C} = H \quad \text{(ii)}$$

$$[7 + 4] \frac{10}{1} = 10$$

$$\therefore 10 = 10$$

$$(i) L = N$$

$$L = S(1-N) + P$$

$$7 = 4 \times (1-N) + 4$$

$$7 = 4 - 4N + 4$$

$$7 = 8 - 4N$$

$$\therefore 10 = N$$

تذریب

الشرع

(ii) $\Delta = N - \infty$ والمطلوب N

$$1 \leq n \leq N \leq \infty \leq [N^2] \frac{2}{\epsilon} = \infty$$

تذریب
۴

الشرع

∴ المتتالية (١٢٥٩ --- ٦٥٢)

$$\therefore 10 \text{ حلا} = 2 \therefore$$

تذریب
۵

ترتيب ٦

أوجد أكبر عدد من الحدود بجملة أخذه من المتقابلة (٥٢١٧٢٤١٢٥٠٠٠٠) .
 ابتداء من الحد الأول ليتولد المجموع موجباً .

الحل

الشرح

(ii) $25 = P$ $2 = S$ (iii) لايجاد عدد الحدود نضع $n < \infty$ (موجباً)

$$\therefore n < \infty$$

$$\therefore \frac{n}{2} [2 + (25 - 2)(n - 1)] > 0$$

$$\therefore 2 + (25 - 2)(n - 1) > 0$$

$$2 + 23n - 23 > 0 \Rightarrow 23n > 21 \Rightarrow n > \frac{21}{23}$$

$$\therefore n > 13, 0 \Rightarrow n = 13$$

ترتيب ٧

مرجع به ٢٥ صفاً من التراسي ، يحتوي الصف الأول على ٢٠ كرسيّاً ، ويحتوي الصف الثاني على ٢٢ كرسيّاً ويحتوي الصف الثالث على ٢٤ كرسيّاً وهكذا ،
 أوجد عدد التراسي في جميع صفوف المسرح .

الحل

الشرح

صف	صف	صف	صف	صف
٢٥	٢٦	٢٤	٢٢	٢٠

$$20 = P$$

$$2 = S$$

$$25 = n$$

واضح أنه عدد التراسي على شكل متقابلة حسابية

$$S_n = \frac{n}{2} [2 + (25 - 2)(n - 1)] = \frac{25}{2} [2 + 23(25 - 1)] = 11 \dots$$

ترتيب ٨

يدخر كريم من عمله اليومي ١٥ جنيهات فإذا كانه يدخر في كل يوم مبلغاً زائراً بمقدار جنيهين عن اليوم السابق له مباشرة فأوجد مجموع ما يدخره خلال ١٥ يوماً

الحل

الشرح

اليوم ١	اليوم ٢	اليوم ٣
١٥	١٧	١٩

$$15 = P$$

$$2 = S$$

$$15 = n$$

ترتيب ٩

سقط جسم من ارتفاع ٤٩٠ متراً تحت تأثير الجاذبية الأرضية وبفرض احتمال المقاومة فإنه يقطع مسافة ٤,٩ متراً في الثانية الأولى، ١٢,٧ متراً في الثانية الثانية، ٢٤,٥ متراً في الثانية الثالثة وهكذا، أوجد:

- المسافة التي يقطعها الجسم في الثانية السابعة
- مجموع المسافات المقطوعة في الثواني الثمانية الأولى
- متى يصل الجسم إلى سطح الأرض

الحل

الشرح

الثانية ١ ٤,٩

الثانية ٢ ١٢,٧

الثانية ٣ ٢٤,٥

٤٩٠

المسافات المقطوعة تتولد متتابعة

$$صابتة \quad ٩,٨ = ٥ \quad ٤,٩ = ٢$$

$$٥ + ٢ = ٧$$

$$٩,٨ \times ٥ + ٤,٩ = ٥٣,٩ \text{ متر}$$

$$٨ = \frac{٧}{٩} = \frac{[٩,٨ \times ٧ + ٤,٩ \times ٥]}{٩} = ٨ \text{ متر}$$

$$٨ = \frac{[٥(١-٧) + ٢ \times ٧]}{٩} = ٨$$

$$\frac{[٩,٨ \times (١-٧) + ٤,٩ \times ٥]}{٩} = ٤٩٠$$

$$٤٩٠ = \frac{[٩,٨ - ٧ \times ٩,٨ + ٩,٨]}{٩} = ٤٩٠$$

ترتيب ١٠

يمتلك كريم محلاً تجارياً للسلع الغذائية ويقوم بترتيب علب لتونة في مصفوف بحيث يضع في الصف الفل ١٢ علبة والصف الذي يليه ١٠ علبة والصف الذي يليه ٨ علبة وهكذا

[٦]

١ أوجد عدد علب لتونة في الصف السابع

[١٠]

٢ في أي صف تتولد علب لتونة ٣٠ علبة؟

٣ أوجد عدد علب لتونة بدو أمه الصف الأول و صف الصف الأخير الذي يحتوي على علب واحدة

[٧٨]

1

(.....592-51557-53) (P)

$$\left(\dots, \frac{2}{9}, \frac{2}{7}, 1, \frac{2}{3} \right) \textcircled{e}$$

②

$${}_1K_n(\xi) = ({}_nZ) \quad (P)$$

$$1 \leq n \leq N \quad (1 - \frac{N}{n}) = (n \cdot 2) \quad \textcircled{P}$$

③

D (C) 1 (P)

تذریب

الحل

الشرح

$$I \leftarrow \Lambda = \sum P \therefore$$

$$\frac{72}{1} = \frac{72}{100} \leq I \div II$$

بالتعويض في $I \Leftarrow A = A \wedge I \Leftarrow I = P$

تاریخ

الحديث السادس والسابع = ٢٨٨ أو عهد المقتاربة

۱۱۱

$$9 = 5Z + 1Z \therefore$$

$$q = \frac{1}{2}P + P \therefore$$

$$I \leftarrow q = (r+1)P$$

بالقول في $I \Leftarrow P=2$ $\therefore$ المتكافئة هي $(3 \leq 7 \leq 15 \leq \dots)$

اگلے

اکمل

1047



الشرع

$$C = \sim Z$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{V}} X P$$

$$15 \div 1057 = {}^{1-2}_5(r) \times 15 \therefore$$

$\therefore \text{بدر } 18 \text{ أيا مُصِيب } 1036 \text{ لتراً} \quad \boxed{18 = 2} \leq \sqrt{2 = 18} = 1 - 2(2) \therefore$

۱۱۱

الشرح (ii) عدد لطريق حالياً ٩٤٠٠

(ii) بعد سنة $(1, 4) \times 9400 = 0.4 \times 9400 + 9400 =$

(iii) بعد سنتين $(1, 4) \times 9400 = 0.4 \times (1, 4) \times 9400 + (1, 4) \times 9400 =$

واضح أنه الزيادة تكون متتالية هندسية $0.4 \times 9400 = P$

$1.4 = \sqrt{}$

$= 9P = 72 = (1, 4) \times 1.4 \times 9400$

$\therefore 72 = (1, 4) \times 9400 = 3.37$ طالب

عند تكوين متتالية هندسية وفيها نسبة مئوية $P\%$

(i) إذا كان فيها زيادة $(1 + P\%) = \sqrt{}$

إذا كان فيها نقص $(1 - P\%) = \sqrt{}$

تدريب للحلقة

١ إذا كانت (١ ٢ ٣ ٤ - ٤) متتالية هندسية فإيه له =

٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

٢ في المتتالية الهندسية $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304, 8388608, 16777216, 33554432, 67108864, 134217728, 268435456, 536870912, 1073741824, 2147483648, 4294967296, 8589934592, 17179869184, 34359738368, 68719476736, 137438953472, 274877906944, 549755813888, 1099511627776, 2199023255552, 4398046511104, 8796093022208, 17592186044416, 35184372088832, 70368744177664, 140737488355328, 281474976710656, 562949953421312, 1125899906842624, 2251799813685248, 4503599627370496, 9007199254740992, 18014398509481984, 36028797018963968, 72057594037927936, 144115188075855872, 288230376151711744, 576460752303423488, 1152921504606846976, 2305843009213693952, 4611686018427387904, 9223372036854775808, 18446744073709551616, 36893488147419103232, 73786976294838206464, 147573952589676412928, 295147905179352825856, 590295810358705651712, 1180591620717411303424, 2361183241434822606848, 4722366482869645213696, 9444732965739290427392, 18889465931478580854784, 37778931862957161709568, 75557863725914323419136, 151115727451828646838272, 302231454903657293676544, 604462909807314587353088, 1208925819614629174706176, 2417851639229258349412352, 4835703278458516698824704, 9671406556917033397649408, 19342813113834066795298816, 38685626227668133590597632, 77371252455336267181195264, 154742504910672534362390528, 309485009821345068724781056, 618970019642690137449562112, 1237940039285380274899124224, 2475880078570760549798248448, 4951760157141521099596496896, 9903520314283042199192993792, 19807040628566084398385987584, 39614081257132168796771975168, 79228162514264337593543950336, 158456325028528675187087900672, 316912650057057350374175801344, 633825300114114700748351602688, 1267650600228229401496703205376, 2535301200456458802993406410752, 5070602400912917605986812821504, 10141204801825835211973625643008, 20282409603651670423947251286016, 40564819207303340847894502572032, 81129638414606681695789005144064, 162259276829213363391578010288128, 324518553658426726783156020576256, 649037107316853453566312041152512, 1298074214633706907132624082305024, 2596148429267413814265248164610048, 5192296858534827628530496329220096, 10384593717069655257060992658440192, 20769187434139310514121985316880384, 41538374868278621028243970633760768, 83076749736557242056487941267521536, 166153499473114484112975882535043072, 332306998946228968225951765070086144, 664613997892457936451903530140172288, 1329227995784915872903807060280344576, 2658455991569831745807614120560689152, 5316911983139663491615228241121378304, 10633823966279326983230456482242756608, 21267647932558653966460912964485513216, 42535295865117307932921825928971026432, 85070591730234615865843651857942052864, 170141183460469231731687303715884105728, 340282366920938463463374607431768211456, 680564733841876926926749214863536422912, 1361129467683753853853498429727072845824, 2722258935367507707706996859454145691648, 5444517870735015415413993718908291383296, 10889035741470030830827987437816582766592, 21778071482940061661655974875633165533184, 43556142965880123323311949751266331066368, 87112285931760246646623899502532662132736, 174224571863520493293247799005065324265472, 348449143727040986586495598010130648530944, 696898287454081973172991196020261297061888, 1393796574908163946345982392040522594123776, 2787593149816327892691964784081045188247552, 5575186299632655785383929568162090376495104, 11150372599265311570767859136324180752990208, 22300745198530623141535718272648361505980416, 44601490397061246283071436545296723011960832, 89202980794122492566142873090593446023921664, 178405961588244985132285746181186892047843328, 356811923176489970264571492362373784095686656, 713623846352979940529142984724747568191373312, 1427247692705959881058285969449495136382746624, 2854495385411919762116571938898990272765493248, 5708990770823839524233143877797980545530986496, 11417981541647679048466287755595961091061972992, 22835963083295358096932575511191922182123945984, 45671926166590716193865151022383844364247891968, 91343852333181432387730302044767688728495783936, 182687704666362864775460604089535377456991567872, 365375409332725729550921208179070754913983135744, 730750818665451459101842416358141509827966271488, 1461501637330902918203684832716283019655932542976, 2923003274661805836407369665432566039311865085952, 5846006549323611672814739330865132078623730171904, 11692013098647223345629478661730264157247460343808, 23384026197294446691258957323460528314494920687616, 46768052394588893382517914646921056628989841375232, 93536104789177786765035829293842113257979682750464, 187072209578355573530071658587684226515959365500928, 374144419156711147060143317175368453031918731001856, 748288838313422294120286634350736906063837462003712, 1496577676626844588240573268701473812127674924007424, 2993155353253689176481146537402947624255349848014848, 5986310706507378352962293074805895248510699696029696, 11972621413014756705924586149611790497021399392059392, 23945242826029513411849172299223580994042798784118784, 47890485652059026823698344598447161988085597568237568, 95780971304118053647396689196894323976171195136475136, 191561942608236107294793378393788647952342390272950272, 383123885216472214589586756787577295904684780545900544, 766247770432944429179173513575154591809369561091801088, 1532495540865888858358347027150309183618739122183602176, 3064991081731777716716694054300618367237478244367204352, 6129982163463555433433388108601236734474956488734408704, 12259964326927110866866776217202473468949912977468817408, 24519928653854221733733552434404946937899825954937634816, 49039857307708443467467104868809893875799651909875269632, 98079714615416886934934209737619787751599303819750539264, 196159429230833773869868419475239575503198607639501078528, 392318858461667547739736838950479151006397215279002157056, 784637716923335095479473677900958302012794430558004314112, 1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224, 3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448, 6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896, 12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792, 25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584, 50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168, 100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336, 200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672, 401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344, 803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688, 1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376, 3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752, 6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504, 12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008, 25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016, 51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032, 102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064, 205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128, 411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256, 822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512, 1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024, 3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048, 6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096, 13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192, 26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384, 52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768, 105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536, 210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072, 421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144, 842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288, 1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576, 3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152, 6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304, 13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608, 26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216, 53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432, 107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864, 215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728, 431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456, 862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912, 1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824, 3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648, 6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296, 13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592, 27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184, 55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368, 110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736, 220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472, 441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944, 883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888, 1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776, 3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552, 7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104, 14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208, 28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416, 56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832, 113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664, 226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328, 452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656, 904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312, 1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624, 3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248, 7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496, 14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992, 28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984, 57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968, 115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936, 231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279872, 463168356949264781694283940034751631413079938662562256157830336031652518559744, 926336713898529563388567880069503262826159877325124512315660672063305037119488, 1852673427797059126777135760139006525652319754650249024631321344126610074238976, 3705346855594118253554271520278013051304639509300498049262642688253220148477952, 7410693711188236507108543040556026102609279018600996098525285376506440296955904, 14821387422376473014217086081112052205218558037201992197050570753012880593911808, 29642774844752946028434172162224104410437116074403984394101141506025761187823616, 59285549689505892056868344324448208820874232148807968788202283012051522375647232, 118571099379011784113736688648896417641748464297615937576404566024103044751294464, 2371421$

الوسط الهندسي

تعريف

إذا كان P و Q و R متتالية هندسية فإن R وسط هندسي بين P و Q .

$$R = \sqrt{P \cdot Q} \quad \text{و} \quad R^2 = P \cdot Q$$

ملاحظات ١ الوسط الهندسي لأي طيتين يجب أن يكون لهما نفس الإشارة [موجبين معاً أو سالبين معاً]

٢ يمكن إيجاد الوسط الهندسي لعدة طيات موجبة عددها n

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \text{الوسط الهندسي الموجب}$$

تدريب ١ عددان موجبان وسطهما الحسابي = ١٠ ووسطهما الهندسي ٦ أوجد العددين.

الحل

نفرض العددين x و y

الوسط الحسابي = ١٠

$$\therefore x + y = 20$$

$$\therefore x - y = 20 \quad \text{I} \leftarrow$$

بالتعويض من I في II $\Rightarrow x - (x - 20) = 36$

$$\Rightarrow 20 - x + x = 36$$

$$\Rightarrow 20 - x + x = 36$$

$$\therefore x = 18$$

$$\therefore y = 2$$

$$\therefore x = 2$$

$$\therefore y = 18$$

$\therefore$ العددين ١٨ و ٢



دائماً في العالين
٠١٢٢٨٤٨٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠

- ملحوظة ١) لدى عدد من حقيقيين موجبين ومختلفين الوسط الحسابي < الوسط الهندسي
٢) لدى عدد من حقيقيين موجبين متساوين الوسط الحسابي = الوسط الهندسي

ترتيب ٢) إذا كانت $s < c < k$ كميات موجبة في متابع هندسي
رائجة أنه: $s + k < c + c$

الكل

- | | |
|---|--|
| $\therefore s < c < k$ في متابع هندسي
$\therefore c$ وسط هندسي بين s و k
$\therefore$ الوسط الحسابي < الوسط الهندسي
$\therefore \frac{s+k}{2} < c$
$\therefore s + k < 2c \leftarrow I$ | $\therefore s < c < k$ في متابع هندسي
$\therefore c$ وسط هندسي بين s و k
$\therefore$ الوسط الحسابي < الوسط الهندسي
$\therefore \frac{s+k}{2} < c$
$\therefore s + k < 2c \leftarrow II$ |
|---|--|

بجمع I و II $s + k < c + c$ بحذف s و c من الطرفين
 $\therefore s + k < 2c$
 #

إدخال n وسط هندسي بين s و k



ترتيب ٣) أفضل ٧ أوساط هندسية موجبة بين ٣ و ٦ و ٨

الكل

- ٣ < عدد الأوساط = ٧ < ٦ و ٨
 $3 = p$
 $6, 8 = k$
 $9 = 3 + 7 = n$

$$\therefore L = 2n$$

$$\therefore L = 1 - \sqrt{p}$$

$$\therefore 2 \times 3 = 6 \div 2$$

$$\therefore \hat{r} = 206 \leq r \pm 2 \therefore \text{الاوساط موجبة} \therefore \boxed{r = 2}$$

$\therefore$ الاوساط هي: ٦ ١٢ ١٨ ٢٤ ٣٠ ٣٦ ٤٢ ٤٨ ٥٤ ٦٠ ٦٦ ٧٢ ٧٨ ٨٤ ٩٠ ٩٦ ١٠٢ ١٠٨ ١١٤ ١٢٠ ١٢٦ ١٣٢ ١٣٨ ١٤٤ ١٥٠ ١٥٦ ١٦٢ ١٦٨ ١٧٤ ١٨٠ ١٨٦ ١٩٢ ١٩٨ ٢٠٤ ٢١٠ ٢١٦ ٢٢٢ ٢٢٨ ٢٣٤ ٢٤٠ ٢٤٦ ٢٥٢ ٢٥٨ ٢٦٤ ٢٧٠ ٢٧٦ ٢٨٢ ٢٨٨ ٢٩٤ ٣٠٠ ٣٠٦ ٣١٢ ٣١٨ ٣٢٤ ٣٣٠ ٣٣٦ ٣٤٢ ٣٤٨ ٣٥٤ ٣٦٠ ٣٦٦ ٣٧٢ ٣٧٨ ٣٨٤ ٣٩٠ ٣٩٦ ٤٠٢ ٤٠٨ ٤١٤ ٤٢٠ ٤٢٦ ٤٣٢ ٤٣٨ ٤٤٤ ٤٥٠ ٤٥٦ ٤٦٢ ٤٦٨ ٤٧٤ ٤٨٠ ٤٨٦ ٤٩٢ ٤٩٨ ٥٠٤ ٥١٠ ٥١٦ ٥٢٢ ٥٢٨ ٥٣٤ ٥٤٠ ٥٤٦ ٥٥٢ ٥٥٨ ٥٦٤ ٥٧٠ ٥٧٦ ٥٨٢ ٥٨٨ ٥٩٤ ٦٠٠ ٦٠٦ ٦١٢ ٦١٨ ٦٢٤ ٦٣٠ ٦٣٦ ٦٤٢ ٦٤٨ ٦٥٤ ٦٦٠ ٦٦٦ ٦٧٢ ٦٧٨ ٦٨٤ ٦٩٠ ٦٩٦ ٧٠٢ ٧٠٨ ٧١٤ ٧٢٠ ٧٢٦ ٧٣٢ ٧٣٨ ٧٤٤ ٧٥٠ ٧٥٦ ٧٦٢ ٧٦٨ ٧٧٤ ٧٨٠ ٧٨٦ ٧٩٢ ٨٠٠ ٨٠٦ ٨١٢ ٨١٨ ٨٢٤ ٨٣٠ ٨٣٦ ٨٤٢ ٨٤٨ ٨٥٤ ٨٦٠ ٨٦٦ ٨٧٢ ٨٧٨ ٨٨٤ ٨٩٠ ٨٩٦ ٩٠٢ ٩٠٨ ٩١٤ ٩٢٠ ٩٢٦ ٩٣٢ ٩٣٨ ٩٤٤ ٩٥٠ ٩٥٦ ٩٦٢ ٩٦٨ ٩٧٤ ٩٨٠ ٩٨٦ ٩٩٢ ١٠٠٠

ترتيب ٤ إذا كانت ٤ ك ك في تتابع حسابي وكانت ٢ ك ٣ + ٥ ك ٢ في تتابع هندسي أو مجرد قيمة ك ك

الحل

$$\begin{array}{l} \therefore ٤ ك ك في تتابع حسابي \\ \therefore \text{وسط حسابي بين } ٤ ك ك \\ \therefore ٤ ك = ٤ + ٤ \\ \therefore ٤ - ٤ = ٤ \end{array} \quad \begin{array}{l} \therefore ٢ ك ٣ + ٥ ك ٢ في تتابع هندسي \\ \therefore (٣ + ٥) \text{ وسط هندسي بين } ٢ ك ٣ \\ \therefore (٣ + ٥) = ٨ \\ \therefore ٨ = ٨ \end{array}$$

$$\text{بالتعويض من I في II} \therefore ٤ ك = ٤ + ٤ = ٨$$

$$\therefore ٨ = ٨ + ٨ = ١٦$$

$$\therefore ١٠ = ٨ + ٢ = ١٠$$

ترتيب ٥ ١ إذا كانت (٢ ك ٣ ك ٤ ك) في تتابع هندسي فإيه :

$$\text{P} \quad ٢ ك > ٣ ك + ٤ ك \quad \text{Q} \quad ٢ ك < ٣ ك + ٤ ك \quad \text{R} \quad ٢ ك = ٣ ك + ٤ ك$$

٢ إذا كانت (٢ ك ٣ ك ٤ ك) متتابعة هندسية فإيه ٢ ك + ٣ ك = ٤ ك

$$\text{P} \quad ١٤ \quad \text{Q} \quad ٢٤ \quad \text{R} \quad ٣٤ \quad \text{S} \quad ٤٤$$

٣ إذا أدخلنا عدة أوساط هندسية بين ٣ ٨ ٢٦ وكان حاصل ضرب الوسطين الثاني والأخير يساوي ٢٣٠٤ فإيه عدد تلك الأوساط =

$$\text{P} \quad ٦ \quad \text{Q} \quad ٨ \quad \text{R} \quad ١٠ \quad \text{S} \quad ١٢$$

مجموع المتتابة الهندسية

$$\frac{p - r^d}{1 - r} = n \cdot r \quad \text{حيث } r \neq 1$$

$$\frac{(1 - r^n)p}{1 - r} = n \cdot r$$

تدريب ١ كم مرة تؤخذ منه المتتابة الهندسية (١ ٣ ٩ ٢٧ ٨١ ...) ابتداءً من صدها الأول ليكون مجموعها ٩٨٤١

الحل

$$\begin{aligned} 1 &= p \\ 3 &= r \\ 9841 &= n \cdot r \\ ??? &= n \end{aligned}$$

$$\frac{(1 - r^n)p}{1 - r} = 9841$$

$$19682 = 1 - r^n$$

$$9 = n \quad \leftarrow \quad 3 = 19682 = r^n$$

تدريب ٢ متتابة هندسية صدها الأول = ٢ وصدها الأخير = ٢٥٦ ومجموع صدها ٥١٠ أوجد المتتابة .

الحل

$$\begin{aligned} 2 &= p \\ 256 &= d \\ 510 &= n \cdot r \\ ??? &= r \end{aligned}$$

$$\frac{p - r^d}{1 - r} = n \cdot r$$

$$\frac{2 - r^{256}}{1 - r} = 510 \quad \leftarrow \quad 2 - r^{256} = 510 - 510r$$

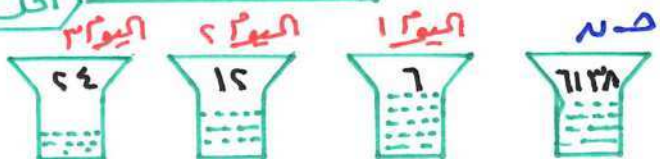
$$2 = r \quad \leftarrow \quad 508 = r^{256}$$

∴ المتتابة هي (٢ ٤ ٨ ١٦ ٣٢ ٦٤ ١٢٨ ٢٥٦ ...)

تدريب ٣ خزان به ٦١٣٨ لتراً من الماء يترب منه في أول يوم ٦ لترات وفي اليوم الثاني ١٢ لترات وفي اليوم الثالث ٢٤ لترات وهكذا فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغاً

الحل

مقدار التربة يوماً بيوماً يكون متتابة هندسية $6 = p$ $2 = r$



$$6138 = N \Leftrightarrow 6138 = \frac{(1 - 2^6)6}{1 - 2} \div 6$$

$$1023 = 1 - 2^6 \Leftrightarrow$$

$$10 = N \Leftrightarrow 1024 = 1 - 2^6 \Leftrightarrow$$

∴ الخزان يصبح فارغاً بعد 10 أيام

ترتيب 4

إذا تضاعفت زراعة البطيخ كل يوم (في أحد الأوساط الغذائية) فلم يَكُنْ عدد البطيخ بعد عشرة أيام إذا كان عددها في اليوم الأول 800

الحل

$$\begin{aligned} 800 &= P \\ 2 &= r \\ 10 &= n \\ ??? &= Nd \end{aligned}$$

$$800 \quad 1600 \quad 3200 \quad \dots \quad ???$$

$$818400 = \frac{(1 - 2^{10})800}{1 - 2} = Nd$$

مجموع المتقاربة الهندسية غير المنتهية

$$S = \frac{P}{r - 1} \quad \text{حيث } |r| < 1 \quad \text{أو } -1 < r < 1$$

ترتيب 5

1 مجموع عدد غير منته من حدود المتقاربة الهندسية (16 32 64 128 256 512 1024 2048 4096 8192 16384 32768 65536 131072 262144 524288 1048576 2097152 4194304 8388608 16777216 33554432 67108864 134217728 268435456 536870912 1073741824 2147483648 4294967296 8589934592 17179869184 34359738368 68719476736 137438953472 274877906944 549755813888 1099511627776 2199023255552 4398046511104 8796093022208 17592186044416 35184372088832 70368744177664 140737488355328 281474976710656 562949953421312 1125899906842624 2251799813685248 4503599627370496 9007199254740992 18014398509481984 36028797018963968 72057594037927936 144115188075855872 288230376151711744 576460752303423488 1152921504606846976 2305843009213693952 4611686018427387904 9223372036854775808 18446744073709551616 36893488147419103232 73786976294838206464 147573952589676412928 295147905179352825856 590295810358705651712 1180591620717411303424 2361183241434822606848 4722366482869645213696 9444732965739290427392 18889465931478580854784 37778931862957161709568 75557863725914323419136 151115727451828646838272 302231454903657293676544 604462909807314587353088 1208925819614629174706176 2417851639229258349412352 4835703278458516698824704 9671406556917033397649408 19342813113834066795298816 38685626227668133590597632 77371252455336267181195264 154742504910672534362390528 309485009821345068724781056 618970019642690137449562112 1237940039285380274899124224 2475880078570760549798248448 4951760157141521099596496896 9903520314283042199192993792 19807040628566084398385987584 39614081257132168796771975168 79228162514264337593543950336 158456325028528675187087900672 316912650057057350374175801344 633825300114114700748351602688 1267650600228229401496703205376 2535301200456458802993406410752 5070602400912917605986812821504 10141204801825835211973625643008 20282409603651670423947251286016 40564819207303340847894502572032 81129638414606681695789005144064 162259276829213363391578010288128 324518553658426726783156020576256 649037107316853453566312041152512 1298074214633706907132624082305024 2596148429267413814265248164610048 5192296858534827628530496329220096 10384593717069655257060992658440192 20769187434139310514121985316880384 41538374868278621028243970633760768 83076749736557242056487941267521536 166153499473114484112975882535043072 332306998946228968225951765070086144 664613997892457936451903530140172288 1329227995784915872903807060280344576 2658455991569831745807614120560689152 5316911983139663491615228241121378304 10633823966279326983230456482242756608 21267647932558653966460912964485513216 42535295865117307932921825928971026432 85070591730234615865843651857942052864 170141183460469231731687303715884105728 340282366920938463463374607431768211456 680564733841876926926749214863536422912 1361129467683753853853498429727072845824 2722258935367507707706996859454145691648 5444517870735015415413993718908291383296 10889035741470030830827987437816582766592 21778071482940061661655974875633165533184 43556142965880123323311949751266331066368 87112285931760246646623899502532662132736 174224571863520493293247799005065324265472 348449143727040986586495598010130648530944 696898287454081973172991196020261297061888 1393796574908163946345982392040522594123776 2787593149816327892691964784081045188247552 5575186299632655785383929568162090376495104 11150372599265311570767859136324180752990208 22300745198530623141535718272648361505980416 44601490397061246283071436545296723011960832 89202980794122492566142873090593446023921664 178405961588244985132285746181186892047843328 356811923176489970264571492362373784095686656 713623846352979940529142984724747568191373312 1427247692705959881058285969449495136382746624 2854495385411919762116571938898990272765493248 5708990770823839524233143877797980545530986496 11417981541647679048466287755595961091061972992 22835963083295358096932575511191922182123945984 45671926166590716193865151022383844364247891968 91343852333181432387730302044767688728495783936 182687704666362864775460604089535377456991567872 365375409332725729550921208179070754913983135744 730750818665451459101842416358141509827966271488 1461501637330902918203684832716283019655932542976 2923003274661805836407369665432566039311865085952 5846006549323611672814739330865132078623730171904 11692013098647223345629478661730264157247460343808 23384026197294446691258957323460528314494920687616 46768052394588893382517914646921056628989841375232 93536104789177786765035829293842113257979682750464 187072209578355573530071658587684226515959365500928 374144419156711147060143317175368453031918731001856 748288838313422294120286634350736906063837462003712 1496577676626844588240573268701473812127674924007424 2993155353253689176481146537402947624255349848014848 5986310706507378352962293074805895248510699696029696 11972621413014756705924586149611790497021399392059392 23945242826029513411849172299223580994042798784118784 47890485652059026823698344598447161988085597568237568 95780971304118053647396689196894323976171195136475136 191561942608236107294793378393788647952342390272950272 383123885216472214589586756787577295904684780545900544 766247770432944429179173513575154591809369561091801088 1532495540865888858358347027150309183618739122183602176 3064991081731777716716694054300618367237478244367204352 6129982163463555433433388108601236734474956488734408704 12259964326927110866866776217202473468949912977468817408 24519928653854221733733552434404946937899825954937634816 49039857307708443467467104868809893875799651909875269632 98079714615416886934934209737619787751599303819750539264 196159429230833773869868419475239575503198607639501078528 392318858461667547739736838950479151006397215279002157056 784637716923335095479473677900958302012794430558004314112 1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224 3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448 6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896 12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792 25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584 50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168 100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336 200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672 401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344 803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688 1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376 3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752 6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504 12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008 25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016 51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032 102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064 205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128 411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256 822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512 1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024 3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048 6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096 13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192 26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384 52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768 105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536 210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072 421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144 842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288 1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576 3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152 6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304 13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608 26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216 53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432 107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864 215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728 431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456 862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912 1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824 3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648 6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296 13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592 27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184 55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368 110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736 220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472 441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944 883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888 1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776 3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552 7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104 14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208 28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416 56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832 113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664 226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328 452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656 904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312 1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624 3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248 7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496 14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992 28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984 57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968 115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936 231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279872 463168356949264781694283940034751631413079938662562256157830336031652518559744 926336713898529563388567880069503262826159877325124512315660672063305037119488 1852673427797059126777135760139006525652319754650249024631321344126610074238976 3705346855594118253554271520278013051304639509300498049262642688253220148477952 7410693711188236507108543040556026102609279018600996098525285376506440296955904 14821387422376473014217086081112052205218558037201992197050570753012880593911808 29642774844752946028434172162224104410437116074403984394101141506025761187823616 59285549689505892056868344324448208820874232148807968788202283012051522375647232 118571099379011784113736688648896417641748464297615937576404566024103044751294464 237142198758023568227473377297792835283496928595231875152809132048206089502588928 474284397516047136454946754595585670566993857190463750305618264096412179005177856 948568795032094272909893509191171341133987714380927500611236528192824358010355712 1897137590064188545819787018382342682267975428761855001222473056385648716020711424 37942751801

ترتيب ٦

مقابلة هندسية فيها $٥ = ٤$ ، $٤ = ٣$ ، $٣ = ٢$ ، $٢ = ١$ أو جبراً المقابلة
وبين أنه يمكن جمع عدد غير منته من حدودها ثم أو جبراً هذا المجموع

الحل

$$\sqrt{٤٩٧} = ٤٤$$

$$\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$$

$$\frac{١}{٣} = \sqrt[٣]{٢٧} \leq \sqrt[٣]{٤٩٧} = ١$$

$$٥ = ٤$$

$$٥ = \sqrt{٢} \leftarrow I$$

$$٥ = \frac{١}{٣} \sqrt[٣]{٢٧}$$

$$١٥ = \sqrt[٣]{٢٧}$$

$\therefore \frac{١}{٣} = \sqrt[٣]{٢٧} > ١$ $\therefore$ يمكن جمع المقابلة الهندسية إلى ∞

$$\therefore \infty = \frac{١٥}{\frac{١}{٣} - ١} = \frac{١٥}{-\frac{٢}{٣}} = -\frac{٤٥}{٢}$$

الأسر عشرى الدائرى

$$\frac{١}{٣} = ٣٣٣٣... \text{ يكتب للاختصار } ٣ \text{ ويسمى كسر عشرى دائرى}$$

ترتيب ٧

ضع العدد $\overline{٧٧٧...}$ على صورة كسر اعتيادى

الحل

أى كسر عشرى دائرى يكون على شكل مقابلة هندسية غير منتهية

$$\overline{٧٧٧...} = ٧٧٧...٧٧٧$$

$$\overline{٧٧٧...} = ٧٧٧ + ٧٧٧٠ + ٧٧٧٠٠ + ٧٧٧٠٠٠ + ...$$

$$\frac{٧٧٧}{٩} = \frac{٧٧٧٠}{٩٠} = \frac{٧٧٧٠٠}{٩٠٠} = \frac{٧٧٧٠٠٠}{٩٠٠٠} = \infty$$

$$\therefore \overline{٧٧٧...} = \frac{٧٧٧}{٩}$$

مبدأ العد

تعريف

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما n

k عدد طرق إجراء عمل ثان m

k عدد طرق إجراء عمل ثالث m وهكذا

فإنه عدد طرق إجراء هذه الأعمال معاً $= n \times m \times \dots \times m$

تدريب ١ شخص لديه ٥ قمصان و ٣ بنطلونات. بكم طريقة يمكنه أن يرتدي زي مكون من بنطالون وقميص

الحل

عدد طرق اختيار قميص $= 5$ عدد طرق اختيار بنطالون $= 3$

$\therefore$ عدد طرق اختيار الزي معاً $= 3 \times 5 = 15$ طريقة

تدريب ٢ بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من {٠, ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩}

الحل

الشرح لاحظ هنا أنه مبدأ العد مشروط :-

(i) الأرقام مختلفة يعني مبنعش ٣٣٠ وهكذا

(ii) رقم المئات مبنعش (صفر)

$\therefore$ عدد طرق اختيار الرقم في خانة المئات $= 3$ (لاستبعدنا صفر)

عدد طرق اختيار الرقم في خانة العشرات $= 3$ (لرضواستبعدنا رقم المئات)

عدد طرق اختيار الرقم في خانة الأحاد $= 2$

$\therefore$ عدد طرق تكوين العدد $= 3 \times 3 \times 2 = 18$ طريقة

أحاد	عشرات	مئات
٢	٣	٣

مفروب العدد
فروب العدد الصحيح الموجب n ياوى حاصل ضرب
جميع الاعداد الصحيحة الموجبة الأصغر منه أو لساوى n

$$n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

ملاحظات ١ $n \in \mathbb{N}^+$

$$2 \quad n = 1 = 1$$

$$3 \quad n = 1 = 1 = 1 \times 1 = 1 \times (n-1) \times n = \dots$$
 وهكذا

٤ يمكن إستخدام الآلة الحاسبة لإيجاد عدد $n!$

ترتيب ١ $1 = 1$

٢ $2 = 1 \times 2$

٣ $3 = 1 \times 2 \times 3$

٤ $4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$

ترتيب ٥ أو بديقة n إذا كان n :-

١ $1 = 1$

٢ $2 = 1 \times 2$

الكل

$5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

$6 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

$7 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$

$10 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$

$5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

$5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

$6 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

ترتيب ٣ أوجد مجموعة حل المعادلة :-

١) $\sqrt{x} = 30 - \sqrt{x}$

٢) $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{x}$

الحل

$\sqrt{x} = 30 - \sqrt{x}$

$\sqrt{x} = 30 - \sqrt{x} \quad \sqrt{x} = 30 - \sqrt{x}$

$30 = (1 - \sqrt{x}) \sqrt{x}$

$30 = \sqrt{x} - x$

$0 = 30 - \sqrt{x} - x$

$\therefore \{7\} = \text{ح.م}$

$5 = \sqrt{x} - x$ مرفوض

$\therefore \sqrt{x} = 1 - \sqrt{x}$

$\sqrt{x} = 1 - \sqrt{x} \quad \sqrt{x} = 1 - \sqrt{x}$

$1 = 1 - \sqrt{x} \quad 0 = 1 - \sqrt{x}$

$1 = \sqrt{x}$

$\therefore \{1, 0\} = \text{ح.م}$

الحل

ترتيب ٤ بكم طريقة يستطيع ٤ طلاب الجلوس :

١) في صف واحد

٢) حول نفس دائرة

عدد طرق اختيار الطالب الأول = ٤

عدد طرق اختيار الطالب الثاني = ٣

عدد طرق اختيار الطالب الثالث = ٢

عدد طرق اختيار الطالب الرابع = ١

$\therefore$ عدد طرق الاختيار = $4 \times 3 \times 2 \times 1$

= ٢٤ طريقة

الطالب الأول ليس له اختيار حتى يكون البقية

عدد طرق اختيار الطالب الثاني = ٣

عدد طرق اختيار الطالب الثالث = ٢

عدد طرق اختيار الطالب الرابع = ١

$\therefore$ عدد طرق الاختيار = $4 \times 3 \times 2 \times 1$

= ٢٤ طرق

ملحوظة عدد طرق ترتيب ٤ من الأشياء في شكل :-

٢) دائرة = $\sqrt{x}$

١) صف واحد = $\sqrt{x}$

٢٠ مجموعة من النصيرين

۱۵۱



Σ 5 3 5 1 5 Σ 1 3 1 5 1

لا حظ

* المجموعة لا تحتاج ترتيب

لا حظ

* العدد يحتاج ترتيب أحدات ثم عشرات

* الاعداد تحمل كل التبدلات المحلنة للرقام

254551

* عدد الطرق = $4! = 24$ طرق

التباديل

۷۷) یعنی العلم ۷۸) یعنی دلیل

(ii) $\sim L^r = \text{عدد صحيح موجب}$

(ii) $\sim$ عدد صحیح پر موجبت

$$\tilde{u} \geq v \geq 1. \quad (iii)$$

قوانين التباديل

١ $n! = n(n-1)(n-2) \dots (1+n)$ فكل التباديل إلى عوامل متتالية أكبر عامل n

علم ل دليل = $\frac{\text{علم}}{\text{علم - دليل}}$

٢ $\frac{n!}{n-1!} = n$

٣ $1 = 0!$

٤ $n! = n \cdot (n-1)!$

٥ $n! = n \cdot (n-1)!$

ملحوظة يمكن ايجار التباديل باستخدام الآلة الحاسبة nPr

٥ ترتيب ١ $4! = 24$

٢ $4! = 24$

٣ $4! = 24$

٦ ترتيب إذا كان $4! = 24$ أو بترقيم $4-3$

الحل

باستخدام الحاسبة يمكن اكل

$4! = 24$

$4! = 24$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$4 = 3$

$4 - 3 = 1$

٧ ترتيب أو بترقيم n :

٥ $4! = 24$

١ $4! = 24$

الحل

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$4 = 3$

$4 - 3 = 1$

$4! = 24$

$4 = 3$

تدريب ٨ أوجد قيمة n

١ $50 = {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \dots + {}^nC_n$

٢ ${}^{n-2}C_2 \times 14 = {}^nC_2$

الحل

$(2-n)(3-n)(5-n) \times 14 = (2-n)(5-n)(1-n)n$

$56 - n14 = n - {}^nC_2$

$0 = 56 + n15 - {}^nC_2$

$8 = n \quad \quad \quad 7 = n$

$50 = (1-n)n + n + 1$

$49 = n - {}^nC_2 + n$

$49 = {}^nC_2$

$\therefore 7 = n \quad \quad \quad 7 = n \quad \text{مرفوض}$

تدريب ٩

١ nC_2 يمكن أن تساوي

٢٠ (د)

١٧ (هـ)

١٦ (و)

١٥ (ب)

٢ عدد الأزواج المرتبة (n, p) التي يمكن تكوينها من عناصر $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ حيث $p \neq n$ هو

٩ (د)

٦ (هـ)

٣ (و)

٢ (ب)

٣ عدد الحروف الجلوون ٤ حروف على أربعة مقاعد في صف رياوي

$1 \times 2 \times 3 \times 4$ (د)

4×4 (هـ)

$4 + 4$ (و)

١ (ب)

٤ إذا كان: $\frac{1}{n} = 10$ فإيه قيمة nC_2 =

٢٤٠ (د)

١٢٠ (هـ)

٢٧٠ (و)

٧٢٠ (ب)

٥ إذا كان: $n \cdot {}^{n-1}C_1 = 10$ فإيه $n = \dots$

٥ (د)

٤ (هـ)

٣ (و)

٢ (ب)

٦ لجنة مؤلفة من ١٢ عضواً. بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب لهذه اللجنة؟

١٣٢ (د)

٦٦ (هـ)

٢٣ (و)

٢ (ب)

التوافيق

نمبر = عدد المجموعات الجزئية المحتوية على r من العناصر التي يمكن تكوينها من مجموعة بها n من العناصر

لاحظ أن

$$\begin{aligned} ① \quad & {}^nC_0 = 1 \\ ② \quad & {}^nC_n = 1 \\ ③ \quad & {}^nC_r = {}^nC_{n-r} \end{aligned}$$

(i) ${}^nC_r = \text{عدد صحيح موجب}$

(ii) ${}^nC_r \geq 0$

(iii) ${}^nC_r \geq 0$

الشروط

قوانين التوافيق

قانون التوزيع

$${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$$

ترتيب إذا كان: ${}^nC_3 = 56$
أوجد قيمة n

الحل

لاحظ المألولة تحتوي تباديل وتوافيق
ولهما نفس العلم والدليل
نستخدم هذا القانون

$${}^nC_3 = {}^nC_{n-3} \Rightarrow {}^nC_3 = {}^nC_{n-3}$$

$$56 = {}^nC_3$$

وباستخدام الماسية nC_r

$$56 = {}^nC_3 \Rightarrow 56 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ترتيب إذا كان: ${}^nC_r = 70$
فأوجد n

الحل

لاحظ المألولة تحتوي تباديل وتوافيق
ولهما نفس العلم والدليل
نستخدم هذا القانون للاختصار

$${}^nC_r = 70 \Rightarrow \frac{n!}{r!(n-r)!} = 70$$

$$70 = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$70 = \frac{n!}{r!(n-r)!} \Rightarrow 70 = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$70 = \frac{n!}{r!(n-r)!} \Rightarrow 70 = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

فیانہ ! سن = صد i سن + صد = ۱۰۰

تدريب ٣ إذا كان $x^n = x^{n-1} - x^{n-2}$ أوجد قيمة x

۱۱۱

لا حظ أنه: العلم = العلم كـ تاوى توفيقين :: نأخذ قانونه لىاوى

$$CA = 2V - \sqrt{r} + \sqrt{r} \quad \text{و} \quad 2V - \sqrt{r} = \sqrt{r} : \text{ل} |$$

$$\sqrt{0} = \sqrt{0}$$

$$\boxed{50 = \sqrt{\quad}} \therefore$$

$$2V - \sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$$

$\therefore \Sigma v = v$ مرفوض

لاہر بالتعویض ہائیوڈ ہرلین کے عالم

٥ ترتيب إذا كان $\frac{1}{3} = 30\%$ أو بقيمة $\frac{1}{3}$

۱۱۱

بالاختصار $\frac{91}{3} = \frac{2 - \cancel{5} (1 - \cancel{5}) (\cancel{1} - \cancel{5}) \cancel{5}}{2 - \cancel{5} \cancel{7}}$ $\Rightarrow \frac{91}{3} = \frac{5}{3 - 5 \cdot 7}$

هذا آخر : لا حظ حاصل ضرب عالين مقناتين

لذلك نوله الى تبادلي

$$1 \text{ m} = \sqrt{1 - \beta} \therefore$$

$$10 = 0 \leq \sqrt{12} = \sqrt{1-0}$$

$$1 \wedge c = (c - 0)(1 - 0) \therefore$$

$$1 \text{ A.C} = 1 + 0.3 - 0.3 \therefore$$

$$= 1 \times 10^{-2} \times 10^{-2} = 10^{-4}$$

۱۵ = ۰ ۱۲ = ۰ حرفوف

تأريخ إذا كان $\mu \sim J^N$ و $v = 0$ فإن $\sigma = 1 - v$ هي خاصية N

۷۵

تدريب ٧

اشترك ٧ أشخاص في مسابقة الشطرنج بحيث تجري مباراة واحدة بين كل شخصين أو بعد عدد مباريات المسابقة.

الحل

العدد الكلي ٧ والعدد المختار ٢ ولا يوجد ترتيب $\therefore$ نستخدم التوافيق
 $\therefore$ عدد طرقة الاختيار $= {}^7C_2 = 21$ طريقة

تدريب ٨

إذا كان لدينا ٢٠ طالب و ١٠ طالبات فبكم طريقة يمكن تكوين لجنة من $\therefore$

١ ٤ طلاب و ٦ طالبين ٢ ٤ طلاب أو ٦ طالبين

الحل

لاحظ أنه هناك عمليتين للاختيار عملية اختيار طلاب وعملية اختيار طالبات
 الترتيب في العمليتين ليس مهم لذلك نستخدم التوافيق

العدد الكلي	٢٠	١٠
العدد المختار	٤	٢

١ عدد طرقة تكوين ٤ طلاب و ٦ طالبين $= {}^{20}C_4 \times {}^{10}C_2 = 210 \times 45 = 9450$

٢ عدد طرقة تكوين ٤ طلاب أو ٦ طالبين $= {}^{20}C_4 + {}^{10}C_2 = 4860$

ملحوظة

١ إذا كان الربط بين الاختيارين و نقوم بعملية $\times$ ناتج الاختيارين
 ٢ إذا كان الربط بين الاختيارين أو نقوم بعملية $+$ ناتج الاختيارين

تدريب ٩

فصل به ٩ أولاد ٦ بنات يُراد تكوين فريق مكون من ٤ أفراد
 من هذا الفصل بحيث يكون الفريق من نفس الجنس

لاحظ أنه: (i) عندنا عمليتين إختيار والترتيب ليهام لذلك نستخدم التوافيق

(ii) محلية الإختيار مع نفس الجنس مضاه ولا فقط أو بنات فقط

∴ عدد طرق تكوين فريق أولاد فقط أو بنات فقط نستخدم +

أولاد بنات

٦

٩

العدد إلتقى

٤

٤

العدد المختار

∴ عدد طرق الإختيار = ${}^9C_4 + {}^6C_4 = 141$

تدريب ١٠ يكمل طريقة يملك للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قراراً بالأغلبية؟

الحل

لاحظ أنه: (i) إختيار اللجنة الترتيب ليهام لذلك نستخدم التوافيق

(ii) اللجنة ٥ أعضاء وقرار الأغلبية موافقه ٥ أو ٤ أو ٣

∴ عدد طرق تكوين اللجنة = ${}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 16$ طريقة

تدريب ١١ يدرس الطالب في إحدى السنوات الدراسية بالجامعة ثمانية مواد مختلفة ولا يجوز

له الانتقال إلى السنة التالية إلا إذا نجح في ٦ منها على الأقل ، يكمل

طريقة يمكن للطالب الانتقال إلى السنة التالية ؟

الحل

لاحظ أنه: (i) إختيار الأسئلة الترتيب ليهام لذلك نستخدم التوافيق

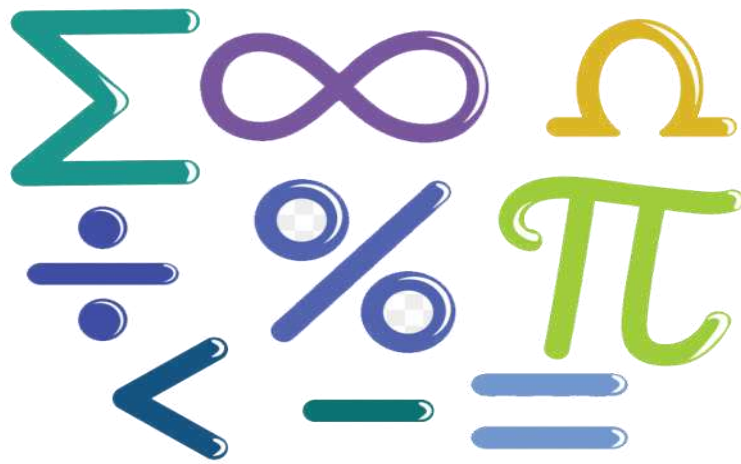
(ii) الطالب عليه الإجابة على ٦ أسئلة أو ٧ أسئلة أو ٨ أسئلة

∴ عدد طرق الإختيار = ${}^6C_6 + {}^7C_6 + {}^8C_6 = 27$ طريقة

نهاية الجبر "إن كان في خطأ فمن نفسي والخطأ مني"

ثانياً :

التفاضل والتكامل



دائماً في العلى

٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧

٠١١١١٩٥٤٨٠٠



D.M.RAZK

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي

معدل التغير

دالة التغير

إذا كانت: $ص = د(س)$

إذا تغيرت $س$: $س_1 \rightarrow س_2$ فإن مقدار التغير في $ص$ يرض

له بالرمز $\Delta ص$ $\Delta ص = ص_2 - ص_1 \Rightarrow \Delta ص = ص_2 - ص_1$

الدالة $د(س)$: $د(س_1) \rightarrow د(س_2)$ فإن مقدار التغير في

الدالة $د(س)$ يرض له بالرمز $\Delta د$ $\Delta د = د_2 - د_1$

حيث: $ت(ه) = د(س_2) - د(س_1)$ وتسمى دالة التغير

(ترتيب) إذا كانت: $د(س) = 3س^2 + س - 2$ أو وجد:

① دالة التغير Δ مقدار التغير عندما تتغير $س$ من $س_1$ إلى $س_2$

أول

① $د(س) = 3س^2 + س - 2$ Δ

$د(س_1) = 3(س_1)^2 + س_1 - 2$

$\therefore د(س_2) = 3(س_2)^2 + س_2 - 2$

بجمع: $I - II \Rightarrow \Delta د = د(س_2) - د(س_1) = 3(س_2^2 - س_1^2) + (س_2 - س_1)$

دالة التغير $\Delta د = د(س_2) - د(س_1) = 3(س_2^2 - س_1^2) + (س_2 - س_1)$

② $س : س_1 \rightarrow س_2$ $\Delta س = س_2 - س_1$

$\therefore ت(ه) = د(س_2) - د(س_1) = 3(س_2^2 - س_1^2) + (س_2 - س_1)$

دالة فتوح التغير

$$م(ه) = \frac{ت(ه)}{\Delta س} = \frac{د(س_2) - د(س_1)}{\Delta س}$$

ترتيب ٢ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : (د(س) = ٢س + ٢ ثم
إصبع متوسط التغير عندما تتغير س من ٣ إلى ٣

الحل

$$I \leftarrow \text{د(س)} = ٢س + ٢$$

$$\text{د(س+ه)} = ٢(س+ه) + ٢$$

$$II \leftarrow ٢س + ٢س + ٢ه + ٢ه + ٢ =$$

$$I - II \leftarrow \text{ت(ه)} = ٢س + ٢ه + ٢ه + ٢ =$$

$$م(ه) = \frac{\text{ت(ه)}}{\text{ه}} = \frac{٢(س+ه) + ٢ - ٢س - ٢ه - ٢}{ه} = ٢$$

$$\therefore \text{س : ٣} \quad \frac{٢ = \text{س}}{\text{ه} = ٣} \leftarrow \text{اد ٣}$$

$$\therefore \text{متوسط التغير م} = ٢ + ٦ = ٨ = \text{اد ٨}$$

معدل التغير معدل التغير = $\frac{\text{د(س+ه)} - \text{د(س)}}{\text{ه}}$

ترتيب ٣ أوجد معدل التغير للدالة د : (د(س) = ٣س + ٢ عند س = ٢

الحل

$$I \leftarrow \text{د(س)} = ٣س + ٢$$

$$\text{د(س+ه)} = ٣(س+ه) + ٢$$

$$II \leftarrow ٣س + ٣س + ٣ه + ٣ه + ٢ =$$

$$(i) \text{ دالة التغير ت(ه)} = ٣س + ٣ه + ٢ه + ٢ =$$

$$(ii) \text{ دالة متوسط التغير م(ه)} = \frac{\text{ت(ه)}}{\text{ه}} = \frac{٣س + ٣ه + ٢ه + ٢}{ه} =$$

$$(iii) \text{ معدل التغير م(ه)} = \frac{\text{ت(ه)}}{\text{ه}} = \frac{٣س + ٣ه + ٢ه + ٢}{ه} =$$

$$\text{عند س} = ٢$$

$$٣س = ٦$$

$$\therefore \text{معدل التغير} = ٨$$

ملحوظة لاحظ الفرق بين: دالة متورط التغير و متورط التغير

$$\text{دالة متورط لتغير } M(h) = \frac{d(5+h) - d(5)}{h} \quad \text{متورط لتغير } M = \frac{d(5) - d(1)}{5-1}$$

تدريب ٤ صفيحة مربعة تقدر بانتظام مختلفة بأكملها بإحدى متورط التغير في مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣ سم إلى ٤ سم ثم احسب معدل التغير في مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها ٥ سم.

الحل

نفرض: طول ضلع الصفيحة = s

المساحة: مساحة المربع = s^2

$$\therefore d(s) = s^2$$

$$(i) \text{ متورط التغير } M = \frac{d(5) - d(1)}{5-1} = \frac{d(3,4) - d(3)}{3,4 - 3}$$

$$\therefore 7,2 = \frac{s^2(3,4) - s^2(3)}{0,4} = M$$

$$(ii) \text{ عند } s=5 \Rightarrow \text{معدل التغير} = \frac{d(5+h) - d(5)}{h}$$

$$= \frac{[5+h]^2 - [5]^2}{h}$$

$$= \frac{25 + 10h + h^2 - 25}{h}$$

$$= \frac{10h + h^2}{h}$$

$$\therefore \text{معدل التغير في المساحة} = 10$$

تدريب ١: مصدر تغيير الكرامة د : د (س) = حسن عن س = ا هو

٣ (٥) حرف (٥) ١ (٥)

٢) متوالية تغير الحالة بحيث $d(n) = n$ عند الانتقال من n إلى $n+1$ --

9,71 (5) 9 (4) 7,1 (3) 9,71 (2)

۳) متوسط التفریحی دیاوی ۷ عندما تفریح من مد ۳ إلى ۵ وكانت

$$= (5) \supset \wedge \text{فيا} \wedge = (3) \supset$$

٢٢ (٩) ١٢ (١٠) ٧ (١١) ٤ (١٢) غيرة

٦ متورط التغير في حجم ملامب عند ما يتغير طول حرفة من ٢٥ إلى ٢٧ = -

1.9 (S) CIA (A) YZY (L) 180 (P)

۵. إذا كان متوسط التغير في y و x عند ما تتغير x من 3 إلى

۳,۹ فایده انقباض من د =

۷۱۷ (۷) ۲۷۶ (۶) ۷۶۸ (۸) ۷۲۹ (۹)

٦) إذا كان متوحد التفرغ في دياوي ٥ عند ما تنقصر من ص ٢ الى ٤

وكان $\gamma = (5) \sim \gamma \wedge (2) = (2)$

$$17 \text{ (S)} \quad \wedge \text{ (P)} \quad \vee \text{ (U)} \quad \Sigma - \text{ (P)}$$

٧) يعطى حجم مزرعة للبلاتريا عند أي لحظة زمنية t (بالدقائق) بالعلاقة :

د (n) = $1 + 2 + \dots + n$ على جبراً فإنه حصل لنمو الذي هو للدالة د عندما $n = 0$ يساوي...

70. (S) 80. (P) 100. (U) 10. (P)

قواعد الإشتقاق

١ إذا كان $y = u^n$ فإن $\frac{dy}{dx} = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$ حيث $n \in \mathbb{R}$

إذا كانت $y = u$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$ حيث u ثابت
 إذا كانت $y = \frac{1}{u}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx}$ حيث $u \neq 0$
 إذا كانت $y = \sqrt[n]{u}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} \frac{du}{dx}$ حيث $n \in \mathbb{N}$

ملاحظات

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :-

١ $y = x^0$ $\frac{dy}{dx} = 0$
 ٢ $y = x^{\frac{\pi}{3}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{3} x^{\frac{\pi}{3}-1}$

٣ $y = x^7$ $\frac{dy}{dx} = 7x^6$
 ٤ $y = x^{\sqrt{3}}$ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3} x^{\sqrt{3}-1}$

٥ $y = x^6$ $\frac{dy}{dx} = 6x^5$
 ٦ $y = x^{\sqrt{3}}$ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3} x^{\sqrt{3}-1}$

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :-

١ $y = \frac{1}{x}$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$
 ٢ $y = \frac{5}{x^2}$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{10}{x^3}$

٣ $y = \sqrt{x}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 ٤ $y = x^{\sqrt{3}}$ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3} x^{\sqrt{3}-1}$

١ إذا كانت $y = \frac{p}{q}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{q \frac{dp}{dx} - p \frac{dq}{dx}}{q^2}$ ملاحظة

٢ إذا كانت $y = \sqrt[n]{p}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} p^{\frac{1}{n}-1} \frac{dp}{dx}$ مشتقة الدالة (د) $\frac{dp}{dx}$

٢ مشتقة مجموع أو الفرق بين دالتين

إذا كانت u و v دالتين قابلتين للأشتقاق بالنسبة إلى المتغير x
وكانت $u = f(x)$ و $v = g(x)$ فإن: $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$

تدريب ٣ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :-

١ $u = 3x^2 - 5x + 9$
حـ =

٢ $u = (3x^2 - 5x + 9)$
حـ =

٣ $u = \frac{5}{x} + 7x + 9$
حـ =

٣ مشتقة حاصل ضرب دالتين

إذا كانت u و v دالتين قابلتين للأشتقاق بالنسبة للمتغير x
وكانت $u = f(x)$ و $v = g(x)$ فإن: $\frac{d}{dx}(f(x) \times g(x)) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$

أي أن: $\frac{d}{dx}(u \times v) = \frac{d}{dx}u \times v + u \times \frac{d}{dx}v$

تدريب ٤ أوجد $\frac{d}{dx}$ للدالة $u = (3x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

الحل

$$\begin{aligned} & (3x + 1) \times (x^3 - x^2 + 1) = \frac{d}{dx}u \\ & (3x + 1) \times (x^3 - x^2 + 1) = (3x + 1) \times (3x^2 - 2x) + (x^3 - x^2 + 1) \times 3 \\ & (3x + 1) \times (3x^2 - 2x) + (x^3 - x^2 + 1) \times 3 = \end{aligned}$$

ترتيب ٥ إذا كانت: $(1+s)(s^2+3) = 1$ أوجد $\frac{ds}{s}$ عند $s=1$

الحل

$$(s^2+3)(1+s) = \frac{ds}{s} \quad \frac{ds}{s} = \frac{(s^2+3)(1+s)}{(s^2+3)} = \frac{ds}{s}$$

$$14 = (3+1)(1) + (3)(1+1) = \left[\frac{ds}{s} \right]_{s=1}$$

ترتيب ٦ إذا كانت: $(1-s)(1+s)(1+s^2)(1+s^4)(1+s^8)(1+s^{16}) = 1$ أوجد $\frac{ds}{s}$ عند $s=1$

الحل

٤ مشتقة خارج قسمة دالتين

إذا كانت: D دالتين قابلتين للاستقامة بالنسبة للمتغير s وكانت: $\frac{D(s)}{r(s)} = \pm$ حيث $r(s) \neq 0$

$$\frac{D(s) \times r(s) - (r(s) \times D(s))}{[r(s)]^2} = \frac{ds}{s}$$

$$\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{(\text{المقام})^2} =$$

ترتيب ٧ إذا كانت $\frac{s^3+s^2+4}{s^2+1} = 1$ أوجد $\frac{ds}{s}$

الحل

$$\frac{17 - (s^2+1)}{(s^2+1)^2} = \frac{(s^3+s^2+4) \times 0 - (s^2+1) \times 3}{(s^2+1)^2} = \frac{ds}{s}$$

٥ مشتقة قوس مرفوع لأس

إذا كانت: $y = [d(x)]^n$ فإيه: $\frac{dy}{dx} = n[d(x)]^{n-1} \cdot d'(x)$

أي أن: $y = (\cos x)^n$ فإيه: $y' = n(\cos x)^{n-1} \cdot (-\sin x)$ (مشتقة القوس)

١ ترتيب ٨ $y = (3x^2 + 5)^2$ $\frac{dy}{dx} =$

٢ $y = \frac{10}{\sqrt{2+5x}}$ $\frac{dy}{dx} =$

٣ $y = \sqrt{2+5x^3}$ $\frac{dy}{dx} =$

١ ترتيب ٩ $y = \sin^{-1} x$ $\frac{dy}{dx} =$ ١٥ ١٢ صفر

٢ إذا كانت: $y = \frac{e}{x} (x^3)$ فإيه قيمة y' عندما $x = 1$ ٨ ٢ ١ ٢٤

٣ إذا كانت $y = \ln x$ فإيه $y'(1)$ ١ صفر ١ - ٢

٤ إذا كانت $y = \ln(x^2 + 5x - 3)$ فإيه: $y' =$ ٥ ٥ ٢ غير موجودة

٥ إذا كانت $y = (x^2 + 5x - 3)^2$ فإيه $y' =$ ٥ ٢ ١٠ ١

هشقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

٦

إذا كانت: $ص = د(ع)$ دالة قابلة للتشتقاق بالنسبة إلى $ع$

$ع = م(س)$ دالة قابلة للتشتقاق بالنسبة إلى $س$

فإن: $ص = د[م(س)]$ تكون قابلة للتشتقاق بالنسبة إلى $س$

فيكون: $\frac{ص}{س} = \frac{د(ص)}{ع} \times \frac{ع}{س}$

تدريب ١٠ إذا كانت: $ص = ع^٥$ $ع = س^٣ - س + ١$ أوجد $\frac{ص}{س}$

الحل

$\frac{ص}{س} = \frac{د(ص)}{ع} \therefore \frac{ص}{س} = \frac{٥ع^٤}{ع}$ $ع = س^٣ - س + ١ \therefore \frac{ص}{س} = \frac{٥ع^٤}{س^٣ - س + ١}$ $\therefore \frac{ص}{س} = \frac{د(ص)}{ع} \times \frac{ع}{س}$ $= \frac{٥ع^٤}{س^٣ - س + ١} \times (٣س^٢ - ١)$ $\therefore \frac{ص}{س} = \frac{٥(٣س^٢ - ١)ع^٤}{س^٣ - س + ١}$	$I \leftarrow \frac{ص}{س} = ع^٥$ $II \leftarrow ع = س^٣ - س + ١$ بالقوانين من II في I $\therefore \frac{ص}{س} = (س^٣ - س + ١)٥$ $\therefore \frac{ص}{س} = ٥(س^٣ - س + ١) = \frac{ص}{س}$
--	--

تدريب ١١ إذا كانت: $ص = (١ + ع)^٥$ $ع = س^٣ - ١$ أوجد $\frac{ص}{س}$ عند $س = ١$

الحل

$\frac{ص}{س} = \frac{د(ص)}{ع} = \frac{٥(١ + ع)^٤}{ع}$ $ع = س^٣ - ١$ $\therefore \frac{ص}{س} = \frac{٥(١ + ع)^٤}{س^٣ - ١}$ عند $س = ١$ $\therefore ع = ٠$ $\therefore \frac{ص}{س} = \frac{٥(١ + ٠)^٤}{١ - ١}$ $\therefore \frac{ص}{س} = ١٥$	$I \leftarrow \frac{ص}{س} = (١ + ع)^٥$ $II \leftarrow ع = س^٣ - ١$ $\therefore \frac{ص}{س} = (١ + س^٣ - ١)^٥$ $\frac{ص}{س} = (س^٣)^٥$ $\frac{ص}{س} = س^{١٥}$ عند $س = ١$ $\therefore \frac{ص}{س} = ١^{١٥} = ١$
---	---

ملحوظة إذا كانت ص دالة قابلة للتقسيم بالنسبة إلى س

فإنه : $\frac{S}{S} = \left(\frac{S}{S}\right) \cdot \frac{S^{1-n}}{S}$

تدريب ١٢ ١ $\frac{S}{S} = \left(\frac{S}{S}\right) \cdot \frac{S^3}{S}$ ٢ $\frac{S}{S} = \left(\frac{S}{S}\right) \cdot \frac{S^7}{S}$

٣ $\frac{S}{S} = \left(\frac{S}{S}\right) \cdot \frac{S^4}{S}$ ٤ $\frac{S}{S} = \left(\frac{S}{S}\right) \cdot \frac{S^5}{S}$

تدريب ١٣ إذا كانت ص = ع + ع = ك ع = س إثبات أنه : $\frac{S}{S} = \frac{E}{S} - \frac{E}{S} = \frac{S}{S} = 1$

الحل

ع = س

ص = ع + ع

$\frac{E}{S} = \frac{S}{S}$

$\frac{S}{S} = 1 + \frac{E}{S}$

$\therefore \frac{S}{S} = \frac{S}{S} \times (1 + \frac{E}{S})$

$= \frac{S}{S} \times (1 + \frac{S}{S}) = \frac{S}{S} + \frac{S}{S} = 1 + 1 = 2$

لذا : $16 = \frac{S}{S} + \frac{S}{S} = 2$ #

تدريب ١٤ إذا كانت ص = ع + ع + ع = ك ع = س أو وجد $\frac{S}{S} = \frac{E}{S} + \frac{E}{S} + \frac{E}{S} = 3$

الحل

ع = س

ص = ع + ع + ع

$\frac{E}{S} = \frac{S}{S}$

$\frac{S}{S} = 3 + \frac{E}{S}$

$\therefore \frac{S}{S} = \frac{S}{S} \times (3 + \frac{E}{S}) = \frac{S}{S} \times \frac{S}{S} = \frac{S}{S} = 3$

عند س = ٣ $\therefore \frac{S}{S} = 3 + \frac{E}{S} = 3 + \frac{S}{S} = 3 + 1 = 4$

$\therefore \frac{S}{S} = \frac{S}{S} \times (3 + 3 \times \frac{E}{S}) = \frac{S}{S} \times (3 + 3 \times 1) = \frac{S}{S} \times 6 = 6$

$$\frac{5}{25} = (ص^0)$$

ترتيب
١٥

$$١٥ ص^٤$$

$$١١ ص^٤ ص^-٤$$

$$١٠ ص^٥ ص^-٥$$

$$٦ ص^٤ ص^-٤$$

$$٢ إذا كانت ص = \frac{1}{١٥} \text{ فإيه } \frac{1}{ص} =$$

$$١٥ ص^-٤$$

$$١٤ ص^-٤$$

$$١٣ ص^-٤$$

$$١٢ ص^-٤$$

$$٣ إذا كانت ص = ع^٢ ك ع = ٣ سن^٢ - ٢ فإيه \frac{ص}{ع} \text{ عند } ع = ٢$$

$$٢٤$$

$$٢٤$$

$$٤٤$$

$$١٤٠$$

$$٤ إذا كانت ص = (سن^٢ - ٤)^٥ فإيه \frac{ص}{ع} =$$

$$٥ (سن^٢ - ٤)^٤$$

$$١٠ (سن^٢ - ٤)^٤$$

$$٤٤ سن^٢$$

$$٤٤ (سن^٢ - ٤)^٤$$

$$٥ إذا كانت ص = (١ + ع)^٣ ك ع = ٢ - ١ فإيه \frac{ص}{ع} =$$

$$١٥ سن^١$$

$$١١ سن^١$$

$$١٥ سن^١$$

$$٨ سن^١$$

$$٦ إذا كانت ص = (سن + ٤)^٣ ك \frac{ص}{ع} = ١٢ \text{ عند } ص = ٤ فإيه ل =$$

$$٢$$

$$٢ \pm$$

$$٢ -$$

$$٤$$

$$٧ إذا كانت ص^٤ = سن^٣ فإيه \frac{ص}{ع} =$$

$$\frac{٣}{٤} سن^{\frac{٣}{٤}}$$

$$\frac{٣}{٤} سن^{\frac{٣}{٤}}$$

$$\frac{٣}{٤} سن^{\frac{٣}{٤}}$$

$$\frac{٣}{٤} سن^{\frac{٣}{٤}}$$

$$٨ إذا كانت د (سن) = \sqrt[٤]{٩ + سن^٤} فإيه د(-٤) =$$

$$\frac{٤}{٥}$$

$$٥$$

$$\frac{١}{١٠}$$

$$\frac{١}{١٠}$$

تطبيقات على المشتقة

* ميل الخط المستقيم ① $m = \frac{y}{x}$ إذا علمت معادلة $y = ax + b$ فإن $m = a$

② $m = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ إذا علمت نقطتين على المستقيم (x_1, y_1) و (x_2, y_2)

③ $m = \tan \theta$ إذا صنع المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية θ

④ $m = \frac{y}{x}$ إذا علمت معادلة الاتجاهية $(x, y) = (a \cos t, a \sin t)$ فإن $m = \tan t$

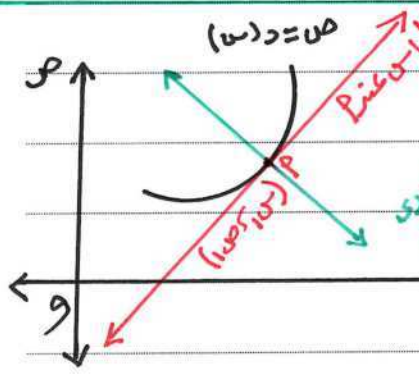
ملاحظات ① المستقيم الذي يوازي محور السينات ميله = صفر

② المستقيم الذي يوازي محور الصادات ميله = غير معرف

③ إذا كان $L \parallel L_1$ فإنه $m = m_1$

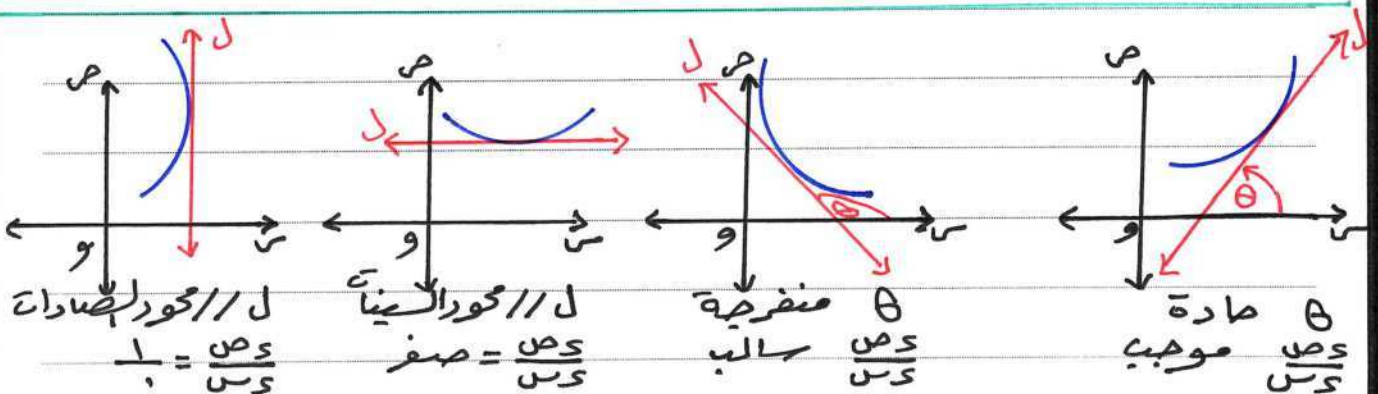
④ إذا كان $L \perp L_1$ فإنه $m = -\frac{1}{m_1}$

* ميل المماس $m = \frac{y}{x}$ صورة المشتقة الأولى للدالة عند نقطة المماس (x_0, y_0)



ميل المماس للمماس: صورة المشتقة الأولى للدالة عند نقطة المماس (x_0, y_0)

ميل المماس $m = \frac{y}{x}$



① $L \parallel \text{محور الصادات}$ $\frac{y}{x} = \frac{1}{0}$

② $L \parallel \text{محور السينات}$ $\frac{y}{x} = 0$

③ θ منفرجة $\frac{y}{x} = \tan \theta$

④ θ حادة $\frac{y}{x} = \tan \theta$

مصادلة المحاس: $ص - ص = ١٥ - ١٥$ $م = ٣$

مصادلة العمود: $ص - ص = ١٥ - ١٥$ $١ - م = ١٥ - ١٥$

ترتيب ١ أوجد ميل المحاس للمنفى $ص = ٤ - ٣ - ٣ + ١$ عند نقطة (١٥١) الواقعة عليه

الحل

(i) نقطة التماس: (١٥١)

(ii) المنفى: $ص = ٤ - ٣ - ٣ + ١$

(iii) ميل المحاس: $\frac{ص}{و} = \frac{٤ - ٣ - ٣ + ١}{١ - ٣} = ١$ بالمقول عند $ص = ١$

$$٣ = ٤ - ٦ = ٤$$

ترتيب ٢ أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المحاس للمنفى $ص = ٣ - ٣ - ٣ + ٣$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (٣٦١) الواقعة عليه

الحل

(i) نقطة التماس: (٣٦١)

(ii) المنفى: $ص = ٣ - ٣ - ٣ + ٣$

(iii) ميل المحاس: $\frac{ص}{و} = \frac{٣ - ٣ - ٣ + ٣}{٣ - ٣} = ١$ عند $ص = ١$

$$٣ = ٣ - ٣ = ١$$

$$\therefore \theta = ٣ \quad \because \theta = ١ \quad \theta = ٤٥^\circ$$

ترتيب ٣ أوجد مصادلة المحاس والعمود للمنفى $ص = ٤ - ٣ - ٣ + ٣$ عند النقطة الواقعة على المنفى والتي إحداثيتها السينية ٢

الحل

(i) نقطة التماس: $ص = ٤$ نوجد $ص = ٣ = ٣ + ٤ \times ٤ - ٨ \times ٢$ (٣٦٢)

(ii) المنفى: $ص = ٤ - ٣ - ٣ + ٣$

(iii) ميل المحاس: $\frac{ص}{و} = \frac{٤ - ٣ - ٣ + ٣}{٨ - ٣} = ١$ عند $ص = ٩$

$$٨ = ٩ \times ٨ - ٤ \times ٦ = ٣$$

ن: معادلة المحس:

$$8 = \frac{3 - \text{ص}}{2 - \text{س}}$$

$$\text{ص} - 8\text{س} = 13 \quad \therefore$$

معادلة العمود:

$$\frac{1 - \text{ص}}{8} = \frac{3 - \text{ص}}{2 - \text{س}}$$

$$\therefore 8\text{ص} + \text{س} - 8 = 3 - \text{ص} \quad \therefore$$

تدريب ٤ أوجد معادلة العمود الممتن لخطية الدالة $\text{ص} = 3\text{س} + 2$ عند كل نقطة من نقاط تقاطعه مع محور السينات

الحل

(i) نقطة التماس: لا يمارس تقاطع الممتن مع محور السينات نضع $\text{ص} = 0$

$$\therefore 3\text{س} + 2 = 0$$

$$\therefore 3\text{س} = -2 \quad \therefore \text{ص} = 0 \quad \therefore (-\frac{2}{3}, 0)$$

$$2 = 3\text{س} - 3 \quad \therefore \text{ص} = 0 \quad \therefore (0, -3)$$

(ii) الممتن: $\text{ص} = 3\text{س} + 2$ (iii) ميل المحس: $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 3$ عند النقطة $(-\frac{2}{3}, 0)$ عند النقطة $(0, -3)$

$$2 = 3\text{س}$$

$$2 = 3\text{س}$$

$$\frac{1 - \text{ص}}{8} = \frac{3 - \text{ص}}{2 - \text{س}}$$

$$\therefore \frac{1 - \text{ص}}{8} = \frac{3 - \text{ص}}{2 - \text{س}}$$

$$\therefore 8\text{ص} + \text{س} - 8 = 3 - \text{ص} \quad \therefore$$

$$\therefore 8\text{ص} + \text{س} - 8 = 3 - \text{ص} \quad \therefore$$

تدريب ٥ أوجد النقطة الواقعة على الممتن $\text{ص} = 3\text{س} + 2$ والتي ميل المحس الممتن عندها يساوي ٥

الحل

(i) الممتن: $\text{ص} = 3\text{س} + 2$ (ii) ميل المحس: $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 5$ (iii) الشرط: $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 5 \Rightarrow 5\text{س} = 3\text{س} + 2 \Rightarrow 2\text{س} = 2 \Rightarrow \text{س} = 1$ بالمقوف: $\therefore \text{ص} = 5 \quad \therefore$ النقطة $(1, 5)$

تدريب ٦ أوجد النقطة الواقعة على المحفة $ص = ص - ٣ - ٢ - ٥$ والتي عندها المحاس للمحفة يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$

الحل

(i) المحفة : $ص = ص - ٣ - ٢ - ٥$

(ii) ميل المحاس : $\frac{ص}{ص} = ٣ - ٢ - ٥$

(iii) الشرط : $\frac{ص}{ص} = \tan 45^\circ = 1$

$\therefore ٣ - ٢ - ٥ = 1$

$\therefore ١ = ١$ $\therefore ٥ = ٥ + ٢ - ١ = ٦$ $\therefore (٦, ١)$ نقطة

$\therefore ١ = ١$ $\therefore ٦ = ٥ + ٢ + ١ = ٨$ $\therefore (٨, ٦)$ نقطة

تدريب ٧ أوجد النقطة الواقعة على المحفة $ص = ص - ٣ - ٩ - ٢٠$ والتي يكون المحاس عندها موازيا لمحور السينات

الحل

(i) المحفة : $ص = ص - ٣ - ٩ - ٢٠$

(ii) ميل المحاس : $\frac{ص}{ص} = ٣ - ٩ - ٢٠$

(iii) الشرط : المحاس // محور السينات $\therefore \frac{ص}{ص} = 0$

$\therefore ٣ - ٩ - ٢٠ = 0$

$\therefore ٩ = ٩$ $\therefore ٢٠ = ٢٠ - ٩ + ٣ = ١٤$ $\therefore (١٤, ٩)$ نقطة

$\therefore ١ = ١$ $\therefore ١٤ = ١٤ - ٩ + ٣ = ٨$ $\therefore (٨, ١٤)$ نقطة

$\therefore$ النقطة هي : $(٨, ١٤)$ و $(١٤, ٩)$

تدريب ٨ أوجد قيمة P التي تجعل المستقيم $ص = ٤ - ٢ + P$ مماس للمحفة $ص = ٥ + ٣$

الحل

(i) المحفة : $ص = ٥ + ٣$

(ii) ميل المحاس : $\frac{ص}{ص} = ٤ - ٢$

(iii) الشرط : المتقيم $\leq$ المحسن

$\therefore$ ص $\leq$ ح

$$2 = 2 \leq 2 = 2$$

$$9 = 5 + 2 = 7 \leq$$

$$P + 2 = 1$$

$$1 = P \leq P + 2 \times 2 = 5$$

ترتيب
٨

١) في المحسن لمتى الدالة ص = ح

$$٥ \text{ ح} - ٥ \text{ ح} = ٥$$

$$٥ \text{ ح} + ٥ \text{ ح} = ٥$$

$$٥ \text{ ح} - ٥ \text{ ح} = ٥$$

$$٥ \text{ ح} - ٥ \text{ ح} = ٥$$

٢) في المحسن لمتى الدالة ص = (٣ - ح) عند ح = ٢

$$١٠ \text{ ح}$$

$$٥ \text{ ح}$$

$$\frac{1}{10} \text{ ح}$$

$$١ \text{ ح}$$

٣) إذا كانت متادلة العمود للمحسن ص = داس عند النقطة (١ - ٢) هي

$$٥ - ٢ = ٣ \text{ فإنه } ٣$$

$$١ - ٢$$

$$١ \text{ ح}$$

$$٢ - ٢$$

$$٢ \text{ ح}$$

٤) إذا كان المتقيم ص = ح = ١ من صفحت الدالة داس = ح - ٣ + ٥

$$= ٥$$

$$٢ \text{ ح}$$

$$٣ \text{ ح}$$

$$٢ \text{ ح}$$

$$١ \text{ ح}$$

٥) إذا كان المحسن للمحسن ص = ح - ٣ + ٥ يصنع مع الاتجاه الموجب

لحوال الخانة زاوية منفرجة فإنه ص = ٣

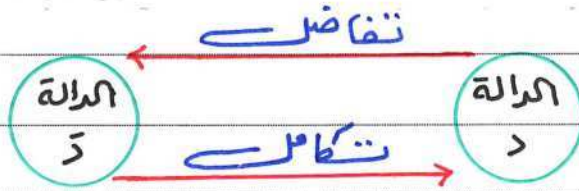
$$[٢٠٠] - ٢$$

$$[٢٠٠] - ٢$$

$$[٢٠٠] - ٢$$

$$[٢٠٠] - ٢$$

التكامل



قاعدة $\int \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x| + C$ حيث C ثابت التكامل $C \neq 1$

تدريب ١

- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + C$
- $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C$
- $\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = -\frac{1}{3x^3} + C$

خواص التكامل إذا كانت f دالة قابلة للتكامل على فترة ما فإما:

- $\int f(x) dx = F(x) + C$ حيث C ثابت $C \neq 0$
- $\int f(x) dx = F(x) + C$ حيث C ثابت $C \neq 0$
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

تدريب ٢

- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

- $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

- $\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C$

تدريب ٢

$$1 \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} &= \end{aligned} \right.$$

$$2 \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} &= \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} =$$

$$3 \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} &= \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} =$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} =$$

$$4 \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} &= \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} =$$

تدريب ٣

$$1 \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} &= \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} =$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} =$$

$$2 \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} &= \end{aligned} \right.$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} =$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} =$$

$$3 \quad \left\{ (5+x)(3+x) \right\}$$

$$= \left\{ (5+x)(3+x) \right\}$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{8x}{3} + \frac{x^2}{3}$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{8x}{3} + \frac{x^2}{3}$$

$$4 \quad \left\{ (1+x)(1+x) \right\}$$

$$= \left\{ (1+x)(1+x) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{3}$$

ترتيب 5

$$1 \quad \left\{ \frac{3x^2 - 6x}{x} \right\}$$

$$= \frac{3x^2 - 6x}{x}$$

$$= \frac{3x^2 - 6x}{x}$$

$$2 \quad \left\{ \frac{7x^2 - 5x + 1}{x^2} \right\}$$

$$= \frac{7x^2 - 5x + 1}{x^2}$$

$$= \frac{7x^2 - 5x + 1}{x^2}$$

$$3 \quad \left\{ \frac{(3+x)(3-x)}{(5-x)} \right\}$$

$$= \frac{(3+x)(3-x)}{(5-x)}$$

$$= \frac{(3+x)(3-x)}{(5-x)}$$

$$= \frac{(3+x)(3-x)}{(5-x)}$$

$$C + \frac{(9 + 5x^2 + 5x)(2 - x)}{(3 - x)} = \frac{5x^3 - 97x}{3 - x} \quad (2)$$

$$C + \frac{(9 + 5x^2 + 5x)(2 - x)}{(3 - x)} =$$

$$9 + \frac{5x^2}{1} + \frac{5x}{1} =$$

$$C + 9 + 5x - \frac{5x^2}{1} + \frac{5x}{1} =$$

$$C + \frac{1 + n(n + 1)}{1 + n} \times \frac{1}{p} = \frac{n(n + 1)}{p} \quad \text{قاعدة}$$

حيث n ثابت $n \neq 1$

$$C + \frac{(5 + 5x)(1)}{5 \times 8} = \frac{5x^7(5 + 5x)}{5 \times 8} \quad \text{ترتيب 7} \quad (1)$$

$$C + \frac{(5 + 5x)(1)}{5 \times 8} =$$

$$C + \frac{5(5 - 5x)(1)}{5 - 5x} = \frac{5x^7(5 - 5x)}{5 - 5x} \quad (2)$$

$$C + \frac{5(5 - 5x)(1)}{5 - 5x} =$$

$$C + \frac{5x^7(5 + 5x)(5)}{5(5 + 5x)} = \frac{5x^7(5 + 5x)(5)}{5(5 + 5x)} \quad (3)$$

$$C + \frac{5x^7(5 + 5x)(5)}{5 \times 5} =$$

$$C + \frac{5x^7(5 + 5x)(5)}{5 \times 5} =$$



دايمًا في العالَمِ
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠

$$\{ \sqrt[3]{x^2(x+5)} \} = \sqrt[3]{x^2(x+5)} \quad (4)$$

$$\hat{C} + \frac{\frac{3}{x}(x+5)}{\frac{3}{x} \times x} =$$

$$\hat{C} + \frac{3}{x}(x+5) \frac{1}{3} =$$

$$\{ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \} = \sqrt[3]{x^2[1+(5-x)]} \quad (5)$$

$$\hat{C} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{5(5-x)}{x \times 5} =$$

$$\hat{C} + \sqrt[3]{x^2} + (5-x) \frac{1}{5} =$$

ترتيب
4

$$\{ \sqrt[3]{x^2(5-x)} \} = \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (2) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (3) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (4) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (5)$$

$$\{ \sqrt[3]{x^2(5-x)} \} = \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (6)$$

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (7) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (8) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (9) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (10)$$

$$\{ \sqrt[3]{x^2(5-x)} \} = \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (11)$$

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (12) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (13) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (14) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (15)$$

$$\{ \sqrt[3]{x^2(5-x)} \} = \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (16)$$

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (17) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (18) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (19) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2(5-x)} \quad (20)$$

الإحتمالات

التجربة العشوائية

هي تجربة معروف نتائجها الممكنة قبل إجرائها وللفنالا نتطيع تقدير أى النواتج سيحققه عند إجرائها .

فضاء العينة

هو مجموعة كل النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية ما
* يرمز لفضاء العينة بالرمز "ف" ويرمز لحددها بخاصة Ω (ف)
* يمثل فضاء العينة بالشجرة البيانبة أو السلسلة البيانبة

ملاحظات

تدريب ١

أكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة ؟
ف = { ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ }
 Ω (ف) = ٦

ب أكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين ؟

ف = { (ص ص) (ص ك) (ك ص) (ك ك) }
 Ω (ف) = ٤

الأحداث

الحادث

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة

أنواع الحدث

١ الحدث المؤكدا (ف) : هو حدث لا بد أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية

١ الحدث الحقيقى : هو الحدث الذى لا يمكن أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية

٢ الحدث البسيط : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوي على عنصر واحد فقط .

٣ ترتيب : في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه . آتت النتائج التالية

- | | | | |
|---|----------------------------|---|----------------------------|
| ١ | ١ : حدث وقوع عدد فرد | ٢ | ٢ : حدث وقوع عدد زوجي |
| ٣ | ٣ : حدث ظهور عدد أولي | ٤ | ٤ : حدث ظهور عدد أكبر من ٧ |
| ٥ | ٥ : حدث ظهور عدد بين ٥ و ٣ | ٦ | ٦ : حدث ظهور عدد أقل من ٧ |

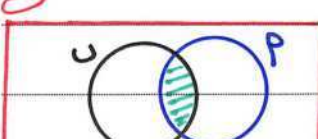
الفضاء

فضاء العينة $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------------|
| ١ | $P = \{1, 3, 5\}$ | ٢ | $C = \{2, 4, 6\}$ |
| ٣ | $H = \{2, 3, 4, 5\}$ | ٤ | $\Phi = \{ \}$ |
| ٥ | $H = \{6\}$ | ٦ | $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ |

العمليات على الأحداث

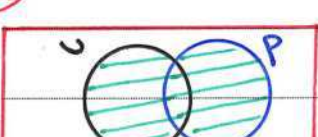
١



حدث وقوع P و C معا

التقاطع $P \cap C$

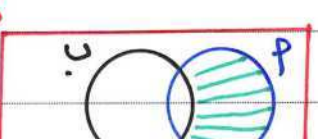
٢



حدث وقوع P أو C

الاتحاد $P \cup C$

٣

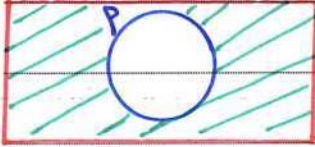


حدث وقوع P فقط

الضرب $(C - P)$

ف

حدث عدم وقوع P



الحدث المتمم $\bar{P}$

ترتيب ٣

منزويده بطاقات مرقمة من ١ إلى ٧ حيث بطاقة واحدة عشوائياً ولون كل الرقم عليها أكتب فضاء العينة ثم أوجد الأحداث التالية:-

١) حدث الوصول على عدد فردي ٢) حدث الوصول على عدد أولي

٣) حدث وقوع P مع K معاً ٤) حدث وقوع P أو U

٥) حدث وقوع P فقط ٦) حدث عدم وقوع P

الحل

ف = {١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧}

١) {١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧}

٢) {١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧}

٣) {١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧}

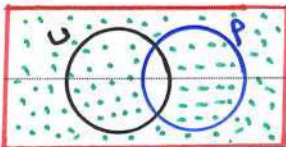
٤) {١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧}

٥) {١}

٦) {٦ ٧ ٤ ٥}

ملاحظات

ف



حدث عدم وقوع P و U معاً
حدث وقوع أحدهما على الآخر

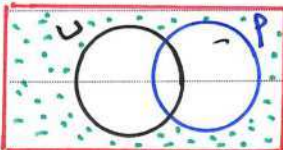
١) $\overline{U \cup P} = (\bar{U} \cap \bar{P})$

حدث عدم وقوع أي من الحدثين

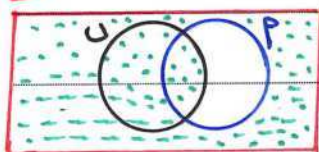
حدث عدم وقوع P وعدم وقوع U

٢) $\bar{U} \cap \bar{P} = \overline{(U \cup P)}$

ف

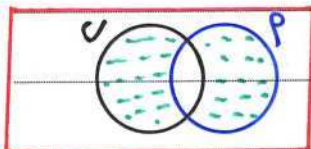


ف



حدث عدم وقوع P فقط
حدث وقوع U أو عدم وقوع P

$$\bar{P} \cup P = (U - P) \quad (3)$$



حدث وقوع أحد الحدثين فقط
حدث وقوع P فقط أو U فقط

$$(P - U) \cup (U - P) \\ (U \cap P) - (U \cup P) = \quad (4)$$

يقال أنه الحدثين P و U متنافيين إذا وفقط إذا كان: $\Phi = U \cap P$ (5)

$$\Phi = \bar{P} \cap P \quad \text{و} \quad \bar{P} \cup P = U \quad (6)$$

$$\bar{U} \cap P = (U - P) \quad \text{حدث وقوع } P \text{ و عدم وقوع } U \quad (7)$$

إذا كان $U \supset P$ فإنه: (8)

$$\Phi = U - P \quad P = U \cap P \quad U = U \cup P$$

الترتيب
ألقى قطعة نقود ثم جرد ولوخط الوجه العلوي لقطعة النقود
والصدور الظاهر على الوجه العلوي للجر الزر مثل فضاء العينة بكل تجري
ثم أوجد الأصدور الآتية:

1 حدث ظهور آتية وعرد زوج

2 حدث ظهور صورة وعرد فرد

3 حدث وقوع الحدث P و وقوع الحدث U

4 حدث وقوع الحدث P فقط

5 حدث عدم وقوع P أو عدم وقوع U

حساب الاحتمال

مثال قصير

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.
أكتب فضاء لعينة، ثم أوجد الأعداد التالية:-

١. عدد وقوع عدد زوجي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦
٢. عدد وقوع عدد أكبر من ٧
٣. عدد وقوع عدد أقل من ٧

الحل

ف = {١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦} $\therefore N(f) = 6$ عدد العناصر
 ١. $P = \{١ ٢ ٣ ٤\}$ $N(P) = 4$ عدد عناصر الحدث P
 حساب احتمال وقوع الحدث $P = \frac{N(P)}{N(f)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

٢. $U = \{٥ ٦\}$ $N(U) = 2$ عدد عناصر الحدث U
 حساب احتمال وقوع الحدث $U = \frac{N(U)}{N(f)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

٣. $\emptyset = \{\}$ $N(\emptyset) = 0$ صفر
 حساب احتمال وقوع الحدث $\emptyset = \frac{N(\emptyset)}{N(f)} = \frac{0}{6} = 0$ صفر

٤. $S = \{١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦\}$ $N(S) = 6$ عدد عناصر الحدث S
 حساب احتمال وقوع الحدث $S = \frac{N(S)}{N(f)} = \frac{6}{6} = 1$

* **حساب الاحتمال** إذا كان في فضاء لعينة تجربة واحدة ما فإنه احتمال وقوع أي حدث $P \supset$ في هو:-

$$L(P) = \frac{N(P)}{N(f)} = \frac{\text{عدد عناصر } P}{\text{عدد عناصر } f}$$

حسابات الاحتمال

١ إذا كان $P \supseteq S$ فإنه يوجد عدد حقيقي يسمى احتمال وقوع A ويكون: صفر $\leq P(A) \leq 1$ أي أن $P(A) \in [0, 1]$

٢ $P(\emptyset) = 0$ أي أن احتمال وقوع الحدث الخاير = 0

٣ $P(S) = 1$ أي أن احتمال وقوع الحدث الحاصل = صفر

٤ إذا كان $P \supseteq S$ حدثين متضادين فإنه:
 $P(S \cup P) = P(S) + P(P)$ $\Rightarrow P(S \cup P) = P(S) + P(P)$

قوانين الاحتمالات

١ $P(S \cup P) = P(S) + P(P) - P(S \cap P)$

(i) احتمال وقوع P و S (ii) احتمال وقوع P و S معاً

٢ $P(S \cup P) = P(S) + P(P) - P(S \cap P)$

(i) احتمال وقوع P أو S (ii) احتمال وقوع أجمع على الأقل

٣ $P(S - P) = P(S) - P(S \cap P)$

(i) احتمال وقوع P و S (ii) احتمال وقوع P فقط

٤ $P(\bar{P}) = 1 - P(P)$

$$(S \cap P)' = (S \cap P)' = (S' \cup P') \quad (5)$$

(i) احتمال عدم وقوع الحدثين معاً (ii) احتمال وقوع أحدهما على الأكثر

$$(S \cup P)' = (S \cup P)' = (S' \cap P') \quad (6)$$

(i) احتمال عدم وقوع أى من الحدثين (ii) احتمال عدم وقوع P وعدم وقوع S

إذا كان $P \supset S$ فإنه :

$$(S) = (S \cup P)$$

$$(P) = (S \cap P)$$

إذا كان $(P)' = (P)'$ فإنه : $(P)' = \frac{1}{2}$

تدريج 1 إذا كان P و S حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف هي :

$$(P) = \frac{3}{8} \quad (S) = \frac{3}{4} \quad (S \cap P) = \frac{1}{2} \quad \text{إما :}$$

$$(1) (S \cup P) \quad (2) (S - P) \quad (3) (P)' \quad (4) (S \cap P)'$$

الحل

لأنه عند حل المسائل يجب أن يكون موجود : (P) ، (S) ، $(S \cap P)$ ، $(S \cup P)$
لأنهم الأساس في أي خطوة أخرى

$\frac{2}{8}$	(P)
$\frac{3}{8}$	(S)
$\frac{1}{2}$	$(S \cap P)$
$\frac{5}{8}$	$(S \cup P)$

$$(1) (S \cup P) = (S) + (P) - (S \cap P) \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{5}{8}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} =$$

$$(2) (S - P) = (S) - (P) \quad (2)$$

$$\boxed{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} =$$

$$(3) (P)' = (P)' - 1 = (P)' - 1 = \frac{5}{8} \quad (3)$$

$$(C \cup P) \setminus I = (C \cup P) \setminus I = (\bar{C} \cap \bar{P}) \setminus I \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} = \frac{2}{8} - 1 =$$

ترتيب إذا كان P و C حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف
وكانه $(P) \setminus I = \frac{0}{8}$ و $(C) \setminus I = \frac{1}{8}$ و $(C - P) \setminus I = \frac{3}{8}$ إجابة:-
① $(\bar{C} \cap \bar{P}) \setminus I$ ② $(C \cup \bar{P}) \setminus I$

الحل

لا مظهر	$(P) \setminus I$	$(C) \setminus I$	$(C \cap P) \setminus I$	$(C \cup P) \setminus I$	يجب تكميله الجبرول كامل
	$\frac{0}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$??	$\frac{2}{8}$??	

$$(ii) \quad \frac{3}{8} = (C - P) \setminus I$$

$$\therefore \frac{3}{8} = (C \cap P) \setminus I - (P) \setminus I$$

$$\therefore \frac{3}{8} = (C \cap P) \setminus I - \frac{0}{8} \Rightarrow \frac{3}{8} = (C \cap P) \setminus I \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{8} = \frac{3}{8} - \frac{0}{8} = (C \cap P) \setminus I$$

$$(iii) \quad (C \cap P) \setminus I - (C) \setminus I + (P) \setminus I = (C \cup P) \setminus I$$

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{0}{8} =$$

$$\frac{1}{8} = \frac{2}{8} - 1 = (C \cup P) \setminus I - 1 = (\bar{C} \cap \bar{P}) \setminus I \quad (1)$$

$$(C \cap \bar{P}) \setminus I - (C) \setminus I + (\bar{P}) \setminus I = (C \cup \bar{P}) \setminus I \quad (2)$$

$$(P - C) \setminus I - (C) \setminus I + (P) \setminus I - 1 =$$

$$(C \cap P) \setminus I + \cancel{(C) \setminus I} - \cancel{(C) \setminus I} + (P) \setminus I - 1 =$$

$$\frac{1}{8} + \frac{0}{8} - 1 =$$

$$\therefore \frac{0}{8} = (C \cup \bar{P}) \setminus I$$

تدريب ٣ إذا كان P حدثين متنافيين ففضاء عينة لتجربة عشوائية وكان

$$L(P) = L(P \cup S) = 7 \text{ و } L(S) = 3 \text{ أوجد } L(P) \text{ و } L(S) :$$

١ إذا كان P و S حدثين متنافيين ٢ إذا كان $S \supset P$

الحل

لاحظ أنه: المألة هنا مشروطة [لها شروط] لذا يجب أنه نأخذ
بشروط المألة واكل صواب المطلوب والمعلوم

$$\text{نفرض: } L(P) = 3 \quad \therefore L(S) = 3$$

١ الشرط: P و S حدثين متنافيين

$$\therefore L(P \cup S) = L(P) + L(S)$$

$$\therefore 7 = 3 + 3$$

$$7 = 6 \Rightarrow 3 = 7 - 3 = 4$$

$$\therefore L(P) = 4 \quad L(S) = 3$$

٢ الشرط: $P \supset S$

$$\therefore L(P \cup S) = L(P)$$

$$\therefore 7 = 3 \Rightarrow 3 = 7 - 3 = 4$$

$$\therefore L(P) = 4 \quad L(S) = 3$$

تدريب ٤ إذا كان P و S حدثين متنافيين ففضاء عينة لتجربة عشوائية وكان

$$P = 0.5 \text{ و } S = 0.7 \text{ أوجد احتمال وقوع الحدث } S$$

$$S = 0.5 \text{ أوجد:}$$

١ احتمال وقوع الحدث P والحدث S معاً

٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

٣ احتمال وقوع الحدث S وعدم وقوع الحدث P

المعطيات :- احتمال وقوع الحدث P
 احتمال وقوع الحدث S
 احتمال عدم وقوع الحدثين معاً
 $\therefore P(S \cap P) = 0.8$
 $\therefore 1 - P(S \cap P) = 0.8 \Rightarrow 1 - P(S \cap P) = 0.8$
 $P(S \cup P) = P(S) + P(P) - P(S \cap P)$
 $0.9 = 0.5 + 0.6 - 0.8$
 ١ احتمال وقوع الحدث P والحدث S معاً $P(S \cap P) = 0.8$
 ٢ احتمال وقوع أحدهما الحدثين على الأقل $P(S \cup P) = 0.9$
 ٣ احتمال وقوع الحدث S وعدم وقوع الحدث P
 $P(S) - P(S \cap P) = P - S$
 $0.6 - 0.8 = 0.2$

تأريخ
 فصل دراسي به ٣٠ طالباً منهم ١٨ يدرسون الاحصاء ١٠٢ يدرسون
 الكمبيوتر ٢٢ يدرسون إحدى المادتين على الأقل أختير طالباً عشوائياً
 إحصاء احتمال أنه يكون الطالب المختار :-

- ١ ممن يدرسون الكمبيوتر والاحصاء ٢ ممن يدرسون الكمبيوتر فقط
- ٣ لا يدرسون الكمبيوتر ٤ لا يدرسون أي من المادتين

الحل

نفرض دارس الكمبيوتر P
 دارس الاحصاء S
 ٢٢ يدرسون إحدى المادتين على الأقل
 $\therefore P(P) = \frac{10}{30}$
 $\therefore P(S) = \frac{18}{30}$
 $\therefore P(S \cup P) = \frac{22}{30}$

١ $P(S \cup P) = P(S) + P(P) - P(S \cap P)$

$$\frac{1}{5} = \frac{7}{30} = \frac{20}{30} - \frac{18}{30} + \frac{10}{30} = (C \cap P) \Delta$$

$$\frac{9}{10} = \frac{2}{30} = \frac{7}{30} - \frac{10}{30} = (C \cap P) \Delta - (P) \Delta = (C - P) \Delta \quad (2)$$

$$\frac{9}{30} = \frac{20}{30} = \frac{10}{30} - 1 = (P) \Delta - 1 = (\bar{P}) \Delta \quad (3)$$

$$(C \cup P) \Delta - 1 = (\bar{C} \cup \bar{P}) \Delta = (\bar{C} \cap \bar{P}) \Delta \quad (4)$$

$$\frac{2}{10} = \frac{8}{30} = \frac{20}{30} - 1 =$$

تدريب يصوب جندياً في وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان احتمال أنه يصيب الجنب الأول الهدف هو 0.5 واحتمال أنه يصيب الجنب الثاني الهدف هو 0.7 واحتمال أنه يصيب الجنب الثاني الهدف معاً هو 0.3. راسمياً احتمال:

1 أنه يصيب الجنب الأول الهدف فقط

2 أنه يصيب أحدهما الهدف على الأقل

الحل



دائماً في العالين
٠١٢٣٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١٩٥٤٨٠٠

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي



امسح الباركود بالموبيل لتثبيت
التطبيق وتحميل كل الملازم مجاناً وبسرعة



حمل التطبيق الآن



كورسات ونتائج امتحانات



ملازم ثانوي



ملازم اعدادي



ملازم ابتدائي



موقع الدكتور محمد رزق
Dr. Mo. RAZK



D.M.RAZK

موقع الدكتور محمد رزق معلم الكيمياء التعليمي